Exercice N° 1:

1- Mettre sous la forme Algébrique $(x+iy)$ les nombres suivants :

$$\frac{1-i}{1+i}\ ;\ \frac{2+3i}{4-3i}\ ;\ (1+i)^n+(1-i)^n\ \ n\in\mathbb{N}$$

2- Mettre chaque nombre sous sa forme polaire :

$$-9i\ ;\ 4-4i\ ;\ -2-2i\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}+i\sqrt{2}$$

Solution :

1)

a) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$

b) $\frac{(2+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{1}{25}(-1+18i)$

c) $(1+i)^n+(1-i)^n=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n+\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$

$=2^{1+\frac{n}{2}}\cos n\frac{\pi}{4}$

2)

a) $-9i=9\left(\cos-\frac{\pi}{2}+i\sin-\frac{\pi}{2}\right)=9e^{-i\frac{\pi}{2}}$

b) $4-4i=4\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c) $-2-2i\sqrt{3}=4\left(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3}\right)=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

d) $\sqrt{6}+i\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice N° 2 :

Vérifier si les fonctions suivantes sont holomorphes dans $\mathbb{C}$:

$f(z)=-e^x\sin y+ie^x\cos y\ ;=g(z)=(ax+iby)^2-i(ax-ib)$ /

a et b deux réels donnés

.

$h(z)=|z|-iIm(z)$, $k(z)=\frac{\bar{z}}{z^2+1}-\bar{z}^2$, $L(z)=ln|\bar{z}|+iArctg\,\frac{\bar{z}-z}{i(z+\bar{z})}$

Solution :

a) On vérifié ***les conditions de Cauchy-Riemann*** :

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{array}}$$

Avec

$$\begin{cases}P=-e^x\sin y\\ Q=e^x\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=-e^x\sin y\ et\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}=-e^x\sin y\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^x\cos y\ et\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{array}$$

Alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiés par conséquent la fonction f est holomorphe sur C

b) On vérifié ***les conditions de Cauchy-Riemann*** sous la forme :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\Omega\subset\mathcal{R}^2:\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial g}{\partial y}=0}$$

$$g(z)=(ax+iby)^2-i(ax-ib)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2a(ax+iby)-ia\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2ib(ax+iby)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=2(a-b)(ax+iby)-ia\neq 0$$

Alors les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiés par conséquent la fonction g n'est pas holomorphe

c) On vérifié ***les conditions de Cauchy-Riemann*** sous la forme :

$$\boxed{\forall z\in D:\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}=0}$$

$$h(z)=|z|-iIm(z)=\sqrt{z.\bar{z}}-\frac{z-\bar{z}}{2}\Rightarrow\left\{\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}+\frac{1}{2}\neq 0\right.$$

$\Rightarrow$Alors les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiés par conséquent la fonction h n'est pas holomorphe *d)* On vérifié ***les conditions de Cauchy-Riemann*** sous la forme :

$$\boxed{\forall z \in D : \frac{\partial L}{\partial \bar{z}} = 0}$$

$$L(z) = ln|\bar{z}| + iArctg\,\frac{\bar{z}-z}{i(z+\bar{z})} = \frac{1}{2}\ln z.\bar{z} + iArctg\,\frac{\bar{z}-z}{i(z+\bar{z})}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}} + i\,\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\bar{z}-z}{i(z+\bar{z})}\right)}{\partial \bar{z}}}{1+\left(\dfrac{\bar{z}-z}{i(z+\bar{z})}\right)^2} \neq 0 \right.$$

$\Rightarrow$Alors les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiés par conséquent la fonction L n'est pas holomorphe

Solution :

<u>Exercice N° 4:</u>

Déterminer une fonction holomorphe $f(z)$ telle que :

$\mathcal{R}ef(z) = e^x(xcosy - ysiny)$, Exprimer f(z) en fonction de la seule variable z.

Solution : soit $\mathcal{R}ef(z) = P(x,y) = e^x(xcosy - ysiny)$ on vérifié si P est une fonction Harmonique :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{R}^2 : \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = e^x\big((x+1)cosy - ysiny\big) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = e^x\big((x+2)cosy - ysiny\big) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^x\big((x+1)siny + ycosy\big) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -e^x\big((x+2)cosy - ysiny\big) \end{cases}$$

D'où $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = e^x\big((x+2)cosy - ysiny\big) - e^x\big((x+2)cosy - ysiny\big) = 0$

Alors P est une fonction Harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que :

$f = P + iQ \Rightarrow f$ est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = e^x\big((x+1)cosy - ysiny\big) & \cdots(1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x\big((x+1)siny + ycosy\big) & \cdots(2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire
$Q(x,y) = \int e^x\big((x+1)cosy - ysiny\big)\ \partial y \Longrightarrow Q(x,y) = e^x(xsiny + ycosy) + g(x)$
$[on\ intégrepar\ paetie \int e^x(-ysiny)\ \partial y = e^x(ycosy - siny)\ ]$

En suite, on dérive $Q(x,y)$par / à x on troue

$$\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x\big((x+1)siny + ycosy\big) + g'(x)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x\big((x+1)siny + ycosy\big) \Longrightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $Q(x,y) = e^x(xsiny + ycosy)$

Finalement on trouve :

$$f = P(x,y) + iQ(x,y) = e^x(xcosy - ysiny) + ie^x(xsiny + ycosy) + ic$$

$$f = e^x\big((x+iy)cosy + (ix - y)siny\big) + ic = e^x\big((x+iy)cosy + i(x+iy)siny\big) + ic$$

$$\Longrightarrow f = (x+iy)e^x(cosy + isiny) + ic = (x+iy)e^x e^{iy} + ic$$

$$\Longrightarrow f(z) = ze^z + ic$$

Exercice N° 5: Déterminer une fonction holomorphe $g(z)$ telle que :
$\Im mg(z) = ln(x^2 + y^2)$, Exprimer g(z) en fonction de la seule variable z.

Solution : soit $\Im mg(z) = Q(x,y) = ln(x^2+y^2)$ on vérifié si Q est une fonction Harmonique :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{R}^2: \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

D'où $\Delta P = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + 2\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$

Alors Q est une fonction Harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que :

$f = P + iQ \Longrightarrow f$ est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} & \cdots(1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2x}{x^2+y^2} & \cdots(2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire

$$P(x,y) = \int \frac{2y}{x^2+y^2}\,\partial x = \frac{2y}{y^2}\int \frac{\partial x}{1+\frac{x^2}{y^2}} \left(on\ fait\ le\ changement\ de\ variable\ t = \frac{x}{y}\ on\ trouve\right)$$

$$\Rightarrow P(x,y) = 2arc\ tg\frac{x}{y} + g(y)$$

En suite, on dérive $P(x,y)$par / à y on troue

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}} + g'(y) = 2\frac{\frac{-x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} + g'(y) = -\frac{2x}{x^2+y^2} + g'(y)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $P(x,y) = 2arc\ tg\frac{x}{y} + c$

Finalement on trouve :

$$f = P(x,y) + iQ(x,y) = P(x,y) = 2arc\ tg\frac{x}{y} + iln(x^2+y^2) + \mathrm{c}$$

$$f = 2i\left(\frac{1}{2}ln(x^2+y^2) - iarc\ tg\frac{x}{y} + ic\right) = 2i\left(\frac{1}{2}ln(x^2+y^2) + iarc\ tg\frac{y}{x} + ic\right) \Rightarrow$$

$$f = 2i(\ln|z| + iargz + ic) = 2i(Logz) + ic$$

Exercice N° 6: Démontrer que :

$$sin^2z + cosz^2 = 1, \quad sin(z_1+z_2) = sinz_1\,cosz_2 + cosz_1\,sinz_2\,,$$
$$cos(z_1+z_2) = cosz_1\,cosz_2 - sinz_1\,sinz_2$$

Solution :

1.

$$\begin{cases} sin^2 z = \left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\dfrac{e^{i2z}+e^{-i2z}-2}{4} \\ cos^2 z = \left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{i2z}+e^{-i2z}+2}{4} \end{cases} \Rightarrow sin^2 z + cos^2 z = 1$$

Exercice N° 7 : Montrer que les zéros $(a) sinz \quad et \quad (b) cosz$ sont tous réels, déterminer leurs valeurs.

Solution :

On a : $sinz = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{i2z} - 1 = 0 \quad \cdots (1)$

$(on\ pose\ T = e^{iz})\ l'éqauation\ (1)\ donne : T^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 1 \\ T = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1 \\ e^{iz} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} iz = \text{Log}1 = i2\pi k \\ iz = \text{Log}{-1} = i\pi(2k+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2\pi k \\ z = \pi(2k+1) \end{cases}$$

Alors les zéros $de\ sinz$ sont tous réels.

Exercice N° 8: Soit $f(z) = \sin z \ \ et \ g(z) = lnz$

1) Déterminer les Modules de f et g
2) Démontrer que f et g sont holomorphes, en déduire leurs dérivées

Solution :

1.

$f(z) = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$ ($on\ utilise\ \cos(iy) = chy;\ \sin(iy) = ishy$)

$$\sin z = \underbrace{\sin x \operatorname{ch} y}_{\mathfrak{Re}(sinz)} + i \underbrace{\cos x \operatorname{sh} y}_{\mathfrak{Im}g(sinz)}$$

$$\|f(z)\| = \sqrt{(\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2} = \sqrt{(\sin x)^2 + (\operatorname{sh} y)^2}$$

$$g(z) = Logz = ln|z| + iargz = \underbrace{\frac{1}{2} ln(x^2+y^2)}_{\mathfrak{Re}(Logz)} + i \underbrace{arc\ tg \frac{y}{x}}_{\mathfrak{Im}g\ (Logz)}$$

$$\|g(z)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)^2 + \left(arc\,tg\frac{y}{x}\right)^2}$$

2. On vérifié ***les conditions de Cauchy-Riemann*** :

a) $f(z) = \sin z = \underbrace{\sin x \operatorname{ch} y}_{\Re e\,(\sin z)} + i\,\underbrace{\cos x \operatorname{sh} y}_{\Im mg\,(\sin z)}$

$$\begin{cases} P = \sin x \operatorname{ch} y \\ Q = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y \;\; et \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y \;\; et \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{matrix}$$

Alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiés par conséquent la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et par conséquent sa dérivé est :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

($on\ utilise\ les\ relations:\ \cos(iy) = chy;\ \sin(iy) = ishy$)

$$f'(z) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos(x+iy)$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = \cos z$$

b) $g(z) = Logz = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{\Re e(Logz)} + i\,\underbrace{arc\,tg\frac{y}{x}}_{\Im mg(Logz)}$

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ Q = arc\,tg\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \;\; et \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \;\; et \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{matrix}$$

Alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiés par conséquent la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et par conséquent sa dérivé est :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = \frac{1}{z}$$

<u>Exercice N° 9:</u> Si nous appelons détermination principale de $\arcsin z$ celle qui vérifie $arc\,\sin 0 = 0$, démontrer que $arc\,\sin z = \frac{1}{i} Log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

Solution :

Soit

$arc\sin z = t \implies z = \sin t$

On a aussi

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = z \implies 2iz = e^{it} - e^{-it}$$

$$\implies 2ize^{it} = e^{2it} - 1 \implies e^{2it} - 2ize^{it} - 1 = 0 \quad \cdots (1)$$

Puis résoudre l'équation (1) (en posant $X = e^{it}$) où elle a deux solutions :

$$\begin{cases} X_1 = iz - \sqrt{1 - z^2} \\ X_2 = iz + \sqrt{1 - z^2} \end{cases}; \ X = e^{it} \implies it = logX$$

$$\implies t = arc\sin z = -ilogX$$

$$\begin{cases} t_1 = -i\log\left(iz - \sqrt{1 - z^2}\right) \\ t_2 = -i\log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \end{cases}$$

Etant donné que $arc\ sin0 = 0$

$$t_1 = -i\log(-1) = -i\pi \neq 0$$

$t_2 = -i\log(1) = 0 \ (verifié\ la\ condition\ donnée =$

$$\implies t = arc\sin z = -i\log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$