Chapitre 01 : Les espaces $\mathcal{L}^P$ et L^P

Dans tout ce chapitre, on se donne une fois pour toutes un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Définition : soient p et q deux réels appartenant à $[1, +\infty]$. on dit que p et q sont des exposants conjugués si
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
cette définition implique $1<p<\infty$ et $1<q<\infty$. comme $p=1$ on a $q=+\infty$, on dit que 1 et $(+\infty)$ sont des exposants conjugués.

Inégalité de Young :

$\forall a \geq 0, b \geq 0$; $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ avec $p, q \in]1, +\infty[$

et p, q sont conjugués.

preuve :

la fonction $\ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$

i.e. $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

donc, pour $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

on pose : $x_1 = a^p \geq 0$, $x_2 = b^q \geq 0$

$$\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$
$$\geq \ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq \ln\left((a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}}\right) = \ln(ab)$$
(1)

$$\Rightarrow \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab$$

$$\Rightarrow \boxed{ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q}$$

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f et g étant deux fonctions

$f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, mesurables. Alors on a

$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

où p et q sont deux exposants conjugués.

preuve. ~~posons~~

si un des deux termes du produit du membre de droite de l'inégalité est nul ou infini celle-ci étant automatiquement satisfaite. nous pouvons supposer qu'il n'en est pas ainsi. posons

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad G(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}}$$

on a alors

$$\int_X (F(x))^q\,d\mu(x) = \int_X (G(x))^q\,d\mu(x) = 1$$

si $x \in X$ tel que :

$$0 < F(x) < \infty, \quad 0 < G(x) < \infty$$

il existe deux nombres réels t et u tels que

$$F(x) = e^{\frac{t}{p}}, \quad G(x) = e^{\frac{u}{q}}$$

la fonction e^x est convexe et p et q sont conjugués, alors

$$e^{\frac{t}{p} + \frac{u}{q}} \leq \frac{1}{p} e^{t} + \frac{1}{q} e^{u}$$

$$\Rightarrow F(x)\, G(x) \leq \frac{1}{p} (F(x))^p + \frac{1}{q} (G(x))^q$$

en intégrant par rapport à la mesure μ, on a

$$\int_X F(x)\, G(x)\, d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \int_X (F(x))^p\, d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X (G(x))^q\, d\mu(x)$$

$$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ alors on a}$$

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{|g(x)|}{\left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}}\, d\mu(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{1}{\left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}} \times \int_X |f(x)|\, |g(x)|\, d\mu(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_X |f(x)|\, |g(x)|\, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \int_X |f(x) g(x)|\, d\mu(x) \leq$$

Remarque : l'orque $p=q=2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Shwartz.

Théorème (Inégalité de Minkowski)

soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, mesurables, on a $\forall 1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

preuve. on a :

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

$$\Rightarrow |f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1} \quad --- (*)$$

on appliquliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_X |f|\,|f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

et

$$\int_X |g|\,|f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

donc, l'equation $(*)$ devient

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_X |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ avec } (p-1)q = p$$

on déviser les deux membres par $\left(\int_X |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$, on obtient le résultat cherché.

Définition et propriétés élémentaires sur $\mathcal{L}^p$ et L^p.

1. Définition 1.1 ($\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$) soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),\ f \text{ mesurable et } \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

on note $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$.

on vérifiera que $\|f\|$ est une semi norme.

Cas particulier : si $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$, on note $\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$

avec la norme : $\|x\|_{\ell^p} = \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque :

$f \in \mathcal{L}^p \iff \|f\|_p < +\infty$, ~~et~~ mesurable, car

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^p &\iff \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \text{ et mesurable} \\ &\iff \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \text{ et mesurable} \\ &\iff \|f\|_p < +\infty \text{ et mesurable}. \end{aligned}$$

Définition 1.2 : on dit qu'~~é~~ une fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est essentiellement bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que

$|f(x)| \leq M$ p.p.

i.e. $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$

on note par

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{, } f \text{ mesurable telle que } \exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } X \}.$$

on note $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \text{ess } |f(x)| = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } X\}$

Lemme 1.3 soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ p.p. sur } X.$$

de sorte que $\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ p.p.}\}$

autrement dit, $\|f\|_\infty$ est une borne atteinte.

Remarque :

1) avec la notation précédente, $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$

les inégalités de Hölder et Minkowski s'écrivent :

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, inégalité de Hölder

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, inégalité de Minkowski.

Corollaire 1.4

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et

l'application, $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$f \longmapsto \|f\|_p$$

est une semi norme.

preuve .

1) $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

a) $\forall f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow (f+g) \in \mathcal{L}^p$

a) Soient $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^p$, alors d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad -- (*)$$

puisque $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty$ et $g \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \|g\|_p < +\infty$

donc, $(*) \Leftrightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < +\infty$

i.e. $(f+g) \in \mathcal{L}^p$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^p \Rightarrow (\lambda f) \in \mathcal{L}^p$

on a : $\|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \|f\|_p < \infty$

donc, $(\lambda f) \in \mathcal{L}^p$.

donc, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (sous-espace de $\mathcal{L}^0$)

de plus, $\|f\|_p$ est une semi norme, car

1) $\|f\|_p \geq 0$

2) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

3) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, inégalité de Minkowski.

4) $f = 0 \Rightarrow \|f\|_p = \left(\int_X |0|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ p.p. sur } X.$$

d'où l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ est une semi norme

ce résultat suggère de décomposer l'espace $\mathcal{L}^p$ en classes d'équivalence de la manière suivante :

nous dirons que deux fonctions f et g appartenat à $\mathcal{L}^p$ sont équivalentes si $\|f-g\|_p = 0$, i.e. f et g sont presque partout égales.

2. L'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

~~définition 1.5~~ : considérons la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ définie par

$$f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f = g \text{ p. p.}$$

$$(\text{i.e. } \|f-g\|_p = 0)$$

on note par $[f]$ la classe d'équivalence de f pour cette notation

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p : g \,\mathcal{R}\, f\}$$
$$= \{g \in \mathcal{L}^p : f = g \text{ p.p.}\}$$

Définition 1.5 : soit $p \in [1, +\infty]$. on note $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

le quotient $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ par la relation d'equivalence $\mathcal{R}$

$$L^p = \{ [f], f \in \mathcal{L}^p \} = \frac{\mathcal{L}^p}{\mathcal{R}}$$

Si on ~~note~~ pose $\| [f] \|_p = \| f \|_p$, on obtient

$$\| [f] \|_p = 0 \Leftrightarrow \| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow [f] = [0]$$

* on associe $L^p(X)$ par les deux opérations

$$+ : L^p(X) \times L^p(X) \longrightarrow L^p(X) \text{ et } \cdot : \mathbb{R} \times L^p(X) \longrightarrow L^p(X)$$

définies par : $[f] + [g] = [f+g]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda [f] = [\lambda f]$

on obtient à un nouvelle espace vectoriel $(L^p(X), +, \cdot)$

sur le corps $\mathbb{R}$.

Remarque

1) on considère les éléments de $L^p(X)$ (l'ensemble des classes d'equivalences) comme des fonctions normales et on désigne par f au lieu $[f]$.

2) l'application : $\| \cdot \|_p : L^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$f \longmapsto \| f \|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $L^p(X)$.

Théorème de Riesz - Fischer :

L'espace de Lebesgue $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) pour tout $p \in [1, +\infty]$, avec la norme

$1 \leq p < \infty$, on a $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$, $p = \infty$, on a $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \text{ess} |f(x)|$

La convergence dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$:

Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions dans L^p et $f \in L^p$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans L^p et on écrit : $f_n \xrightarrow{L^p} f$, si

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Corollaire : L'espace $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) g(x) d\mu(x), \quad f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$$

$$f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz :

L'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2$, donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$$\Rightarrow \int_X |f(x) g(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g(x)|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|f g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Remarque :

pour $p \neq 2$, l'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Inclusion des espaces L^p

Théorème 1.8

1) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré finie ($\mu(X) < \infty$) et soit $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p \geq q$, alors on a

$$L^\infty(X) \subset \cdots \subset L^p(X) \subset \cdots \subset L^q(X) \subset \cdots \subset L^2(X) \subset \cdots \subset L^1(X)$$

2) si $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, on a $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$

Exemple : soit $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$, $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est mesurable

on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{1+|x|}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2|x|+x^2} dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty$$

donc, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

mais, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{1+|x|}\right| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|x|}\,dx$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = 2\left[\ln(1+x)\right]_0^{+\infty} = +\infty$$

donc, $f \notin L^1(\mathbb{R})$, ce qui donne $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

car, $\mu(\mathbb{R}) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Théorème 1.9 (Extension du théorème de convergence dominée)

soient $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de L^p et

$g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ un élément de L^p tels que

(i) $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f$ μ p.p.

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ p.p.

Alors, $f \in L^p$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Corollaire 1.10 : Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de L^p telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente μ p.p.

De plus la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (définie μ p.p.) appartient

à L^p et $\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|_p = 0$.

Exemple :

1) $f \in L^p(X)$ et $g \in L^p(X)$ où $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré

Montrer si on pose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, on a $fg \in L^r$

et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

2) soit maintenant $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $pq \geq p+q$

supposons que $(f_n)_{n\geq 0} \in L^p$ et $(g_n)_{n\geq 0} \in L^q$ tels que

$f_n \xrightarrow{L^p} f$ et $g_n \xrightarrow{L^q} g$

Trouver l'espace convenable de sorte que la suite

$(f_n g_n)_{n\geq 0}$ converge dans cet espace

2) on a : $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + f(g_n - g)$

d'après Minkowski, on a

$$\|f_n g_n - fg\|_r \leq \|(f_n - f)(g_n - g)\|_r + \|(f_n - f)g\|_r + \|f(g_n - g)\|_r$$

D'après Hölder, on a

$$\|f_n g_n - fg\|_r \leq \|f_n - f\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n g_n - fg\|_r = 0 \iff f_n g_n \xrightarrow{L^r} fg$ pour

$$r = \frac{pq}{p+q}$$

Théorèmes de densité

Définition 1.11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et E_0 sous-espace de E, on dit que E_0 est dense dans E, s'il existe pour tout $f \in E$ et $\varepsilon > 0$ un élément $f_0 \in E_0$ tels que

$$\|f - f_0\| < \varepsilon$$

Théorème 1.12. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble E des fonctions étagées définies sur cet espace, telles que

$$(\forall f \in E) ; \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < \infty$$

est dense dans $L^p(X)$, si $1 \leq p < \infty$.

Définition : 1.13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, on appelle support de f la fermeture de l'ouvert

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.$$

i.e. $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$

Corollaire 1.14

L'espace vectoriel $C_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support borné sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$

Exemple :

la fonction $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases} \in C_c^0(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$

quelques propriétés de l'espace $L^p(X)$

L'espace $L^p(X)$	Reflexif	séparable	Espace dual
L^p $1 < p < \infty$	oui	oui	L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
L^1	non	oui	L^∞
L^∞	non	non	contient strictement L^1

Exercice

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$, on suppose que f et f'' appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $f f''$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

solution : on déduit de l'inégalité élémentaire

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ que}$$

$$|f(x) f''(x)| \leq \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (f''(x))^2 \right) \quad \text{et donc}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x) f''(x)| \, dx \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_2^2 + \|f''\|_2^2 \right) < +\infty$$

car $f \in L^2$, $f'' \in L^2 \Rightarrow f f'' \in L^1(\mathbb{R})$.

* on montre que si $1 \leq q \leq p$ on a $L^p(X) \subset L^q(X)$

supposons que $1 \leq q < p$ (car $q = p$ est trivial)

posons $r = \frac{p}{q} > 1$ et r' t.q. $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$

soit $f \in L^p \Rightarrow \int_X |f|^{qr} d\mu = \int_X |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow (f)^q \in L^r$

et $\int_X |1|^{r'} d\mu = \int_X d\mu = \mu(X) < +\infty \Rightarrow 1 \in L^{r'}$

l'inégalité de Hölder appliquée à $(f)^q$ et 1, on a

$$\int_X |f|^q \times 1 \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{qr} d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_X |1|^{r'} d\mu\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\mu(X)\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_q^q \leq \|f\|_p^q \left(\mu(X)\right)^{1-\frac{q}{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f\|_q \leq \|f\|_p \left(\mu(X)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}$$

i.e. $L^p(X) \subset L^q(X)$