Chapitre 02 : La Transformation de Fourier des fonctions

1. Définitions et Notations

on note $L^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mesurable telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < +\infty$

Exemples

1) la fonctions $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, car f est mesurable et $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{1+x^2}\right| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi < +\infty$

2) la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$, de façon générale, sauf dans le cas de la fonction nulle, les fonctions polynômes n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 2.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f, la fonction complexe de la variable réelle ξ telle que : $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x.\xi} f(x)\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

cette intégrale est bien définie puisque $\left|e^{-2\pi i x\xi} f(x)\right| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$.

on écrira symboliquement : $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\big(f(x)\big)(\xi)$.

proposition 2.1

si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est bornée, continue, $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $\xi \longrightarrow \pm\infty$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

preuve. on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx \ , \ \xi \in \mathbb{R}.$$

la fonction sous le signe intégrale est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

En outre, on a

$$\left| e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) \right| = |f(x)| \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

le second membre appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et d'après le théorème de continuité pour les fonctions définies par intégrale, la fonction $\hat{f}$ est continue, par ailleurs, on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ce qui montre $\hat{f}$ est bornée, De plus

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{ess} \, |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 .$$

* on montre maintenant que $\lim_{\xi \to \pm\infty} f(\xi) = 0$.

* on sait que l'espace des fonctions étagées à support borné sur $\mathbb{R}$ est ~~dans~~ dense dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\exists (\varphi_n)_n$ suites de support bornée telles que

$$\varphi_n \xrightarrow{L^1} f \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0.$$

alors, on a $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}(x)$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}(x)\right) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{i \cancel{\alpha_k}}{2\pi \xi} \left(e^{-2\pi i \xi \alpha_k} - e^{-2\pi i \xi \alpha_{k-1}} \right)$$

alors, on a

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \right) \frac{1}{|\xi|}$$

si $\xi \to \pm\infty$, on a $|\hat{\varphi}(\xi)| \longrightarrow 0$, alors on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)| + |\hat{\varphi}(\xi)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\xi \to \pm\infty} |\hat{f}(\xi)| \leq 0 \Rightarrow \lim_{\xi \to \pm\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0}$$

Exemple : Calculer la T. F. de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Cas particulier 1 : si f est paire

on sait que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, donc l'intégrale de Fourier s'écrit : $\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(2\pi x\xi) - i\sin(2\pi x\xi)) f(x)\,dx$

or, les fonctions $x \longmapsto f(x)\cos(2\pi x\xi)$ et $x \longmapsto f(x)\sin(2\pi x\xi)$ sont respectivement paire et impaire, donc

~~$\mathcal{F}(f(x))(\xi)$~~

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi x\xi)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)\,dx$$

et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi x\xi)\,dx = 0$

donc, si f est paire, $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ est un nombre réel et

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)\,dx.$$

Cas particulier 2 : si f est impaire

De la même façon, on montre que si f est impaire, $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ est un nombre imaginaire pur et on a

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi x\xi)\,dx$$

3. Transformation de Fourier inverse

On peut obtenir $f(x)$ à partir de $\hat{f}(\xi)$ par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier)

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi))(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Et plus généralement, si f n'est pas continue en x_0, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} .$$

où $f(x_0+0)$ et $f(x_0-0)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$.

4. Propriétés de la Transformée de Fourier

1. Linéarité : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x))(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$$

Démonstration. On a

$$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} g(x)\, dx$$

$$= \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$$

2. Translation : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = \mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-2\pi i \xi a} \hat{f}(\xi) .$$

où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$

preuve. on a

$$\mathcal{F}\left(f(x-a)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x-a)\,dx \text{ , on pose } y = x-a$$
$$dy = dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (y+a)\xi} f(y)\,dy$$

$$= e^{-2\pi i a\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y\xi} f(y)\,dy$$

$$= e^{-2\pi i a\xi}\,\hat{f}(\xi)$$

3. Changement d'échelle : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\mathcal{F}(h_\lambda f)(\xi) = \mathcal{F}\left(f(\lambda x)\right)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

où $(h_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$

preuve.

$$\mathcal{F}\left(f(\lambda x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(\lambda x)\,dx \text{, il y a deux cas}$$

a) $\lambda > 0$, on pose $\lambda x = y \Rightarrow dy = \lambda\,dx$, alors

$$\mathcal{F}\left(f(\lambda x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y \frac{\xi}{\lambda}} f(y)\,\frac{dy}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)} f(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

b) si $\lambda < 0$, alors on a $y = \lambda x \Rightarrow dy = \lambda\,dx$

$$\mathcal{F}\left(f(\lambda x)\right)(\xi) = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-2\pi i y \frac{\xi}{\lambda}} f(y)\,\frac{dy}{\lambda}$$

$$= \frac{-1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)} f(y)\,dy$$

$$= \frac{-1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{1}{-\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

donc, $\mathcal{F}\left(f(\lambda x)\right)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

4. Modulation. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i \xi_0 x} f(x)\right)(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$$

preuve. On a

$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i \xi_0 x} f(x)\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi_0 x} \times e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (\xi - \xi_0) x} f(x)\, dx$$

$$= \hat{f}(\xi - \xi_0).$$

~~proposit~~ **Remarque :**

si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$

proposition 2.3

soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, supposons que f est dérivable et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}\left(f'(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)\, \hat{f}(\xi).$$

Si en outre, f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi).$$

preuve. On a

$$\mathcal{F}\left(f'(x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} f'(x)\, dx$$

$$= \left[e^{-2\pi i x \xi} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx \text{ , par partie}$$

$$= 0 + (2\pi i \xi) \hat{f}(\xi) \text{ , car } e^{-2\pi i x \xi} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

on peut démontrer par la récurrence que

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$$

proposition 2.4 soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et l'on a

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left(-2\pi i x f(x)\right)(\xi)$$

Si en outre, $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\frac{d^{(n)}}{d\xi^n} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^n f(x)\right)(\xi).$$

preuve. on a

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx$$

~~D'après le théorème~~ comme $\left| -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi} \right| = 2\pi \left| x f(x) \right|$

et que par hypothèse $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx$$

$$= \mathcal{F}\left(-2\pi i x f(x)\right)(\xi)$$

plus généralement, si $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ on peut montrer

par la récurrence que

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{(n)} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(-2\pi i x\right)^n f(x)\right)(\xi)$$

5. produit de convolution

soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

La transformée de Fourier du produit de convolution est

$$\mathcal{F}\left((f*g)(x)\right)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

on peut montrer aussi, que

$$\mathcal{F}^{-1}\left((f*g)(x)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(f(x)\right)(\xi) \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(g(x)\right)(\xi)$$

preuve. on a

$$\mathcal{F}\left((f*g)(x)\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} (f*g)(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \right) dx$$

En appliquant le théorème de Fubini, alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} g(x-t)\, dx \right) dt$$

on pose $y = x - t \Leftrightarrow dy = dx$, alors

$$\mathcal{F}\left((f*g)(x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (y+t)\xi} g(y)\,dy\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t\xi} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y\xi} g(y)\,dy\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t\xi} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y\xi} g(y)\,dy$$

$$= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$$

Exemple !

1) Trouver la transformée de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

2) Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\xi}\,d\xi$

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

6. Formule de Parseval - Plancherel

On a la relation suivante établie par Parseval pour les Séries de Fourier et généralisée par Plancherel (1910) aux transformées de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

Un cas particulier important si $f = g$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{f}(\xi)}\, d\xi$$

i.e. $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi$$

Exemple : on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2}, \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Sachant que $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, déterminer $\hat{g}(\xi)$ et $\hat{h}(\xi)$.

proposition 2.5

soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a

$$\mathcal{F}(\check{f}(x))(\xi) = \hat{f}(-\xi), \quad \text{où } \check{f}(x) = f(-x)$$

preuve. on a

$$\mathcal{F}(\check{f}(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \check{f}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(-x)\, dx, \quad \begin{array}{l} y = -x \\ dy = -dx \end{array}$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} e^{-2\pi i(-y)\xi} f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y(-\xi)} f(y)\, dy = \hat{f}(-\xi).$$

corollaire 2.6

soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}\left(\hat{f}(\xi)\right)(x) = f(-x)$$

Autrement dit, $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right) = \check{f}$ p.p.

7. Exemples usuels

Soit $a > 0$ fixé, c et d deux réels tels que $c < d$.

Calcul direct : En appliquant la définition de la transformée de Fourier on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

(i) $$\mathcal{F}\left(\chi_{[c,d]}(x)\right)(\xi) = \begin{cases} d - c, & \xi = 0 \\ \dfrac{\sin \pi(d-c)\xi}{\pi \xi} e^{-i\pi(c+d)\xi}, & \xi \neq 0 \end{cases}$$

en particulier $$\mathcal{F}\left(\chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)\right)(\xi) = \frac{\sin(\pi a \xi)}{\pi \xi}$$

(ii) $$\mathcal{F}\left(e^{-ax} \chi_{]0,+\infty[}(x)\right)(\xi) = \frac{1}{a + 2\pi i \xi}$$

(iii) $$\mathcal{F}\left(\left(1 - \frac{2|x|}{a}\right) \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(x)\right)(\xi) = 2\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \xi}{2}\right)}{\pi^2 a \xi^2}$$

(iv) $$\mathcal{F}\left(e^{ax} \chi_{]-\infty,0[}(x)\right)(\xi) = \frac{1}{a - 2\pi i \xi}$$

(v) $$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}$$

(vi) $$\mathcal{F}\left(\operatorname{sign}(x)\, e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{-4\pi i \xi}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}$$

(vii) $$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}$$

(viii) $$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(ax)}\right)(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi^2 \xi}{a}\right)}$$

(IX) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$

Théorème 2.7

soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.

8. Résolution des équations intégrales par la transformée de Fourier

* Une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce est une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

où f et K sont des fontions données, $K(x,y)$ s'appel le noyau de l'intégrale et $\varphi(x)$ c'est la fonction inconnue.

pour la résoudre il faut que le noyau dépendant de la différence des arguments, i.e. l'equation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \quad \ldots\ldots (*)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) - (K * \varphi)(x) = f(x)$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\hat{\varphi}(\xi) - \hat{K}(\xi)\cdot\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad \text{------} \ (**)$$

avec $\hat{\varphi}(\xi)$, $\hat{K}(\xi)$, $\hat{f}(\xi)$ les Transformées de Fourier de $\varphi(x)$, $K(x)$, $f(x)$ respectivement. Sous la condition $1-\hat{K}(\xi) \neq 0$, l'egalité $(**)$ devient

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1-\hat{K}(\xi)}$$

Moyennant la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{1-\hat{K}(\xi)} \, d\xi$$

Exemple: Résoudre l'equation intégrale suivante : $\varphi(x) - \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} \varphi(t)\,dt = e^{-|x|}$ sachant que : $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$

9. Extension de la transformée de Fourier aux fonctions de carré intégrable.

la définition de la transformée de Fourier donnée par la formule $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\,dx$ n'est pas directement applicable à une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. Toutefois, cette définition convient lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on démontre que $\hat{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Cette isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et cette extension permet de définir la transformée de Fourier (on peut aussi l'appeler la transformée de Fourier - plancherel) pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 2.8 (théorème de plancherel)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

L'extension de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ se fait en utilisant la densité $\left(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et la complétion de $L^2(\mathbb{R})$. C'est une application du résultat de topologie suivant

Lemme 2.9

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E. Si u est une application linéaire continue de G dans F, alors il existe un prolongement unique $\hat{u}$ linéaire continue de E dans F et la norme de $\hat{u}$ est égal à la norme de u.

D'après le théorème de plancherel (Théorème 2.8) $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En appliquant le lemme ci-dessus avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et $G = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on obtient le théorème suivant

Théorème 2.10 (Théorème de Plancherel - Riesz)

Il existe une automorphisme unique, qu'on note aussi $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge canoniquement l'isométrie

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

De plus pour tout $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on a

1°) $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ p.p.

2°) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$

3°) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 = 0$ où $\displaystyle\varphi_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\,\chi_{[-A,A]}(x)\,dx$

4°) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$ où $\displaystyle\psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi}\,\hat{f}(\xi)\,\chi_{[-A,A]}(\xi)\,d\xi$

Exemple. on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(\pi x)\, e^{-\pi x^2}$$

1) calculer $\hat{f}(\xi)$ et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$$

2) calculer $\hat{g}(\xi)$, on rappelle que $\mathcal{F}(\pi x e^{-\pi x^2})(\xi) = -i\pi\xi\, e^{-\pi\xi^2}$

Théorème 2.11 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si pour presque tout

$\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-A}^{A} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx$$

converge vers une limite finie qu'on note $g(\xi)$,

lorsque A tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{F}(f) = g$ p.p.

10. transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et convolution

Théorème 2.12

1°/ si $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

2°) si $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

11. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ d'une dérivée

Théorème 2.13 soit $f \in L^2(\mathbb{R})$

Si f est continue de classe C^1 par morceau et telle

que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = (2\pi i \xi)\hat{f}(\xi).$$

- Si de plus f est de classe C^m par morceau où

$m \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$

jusqu'à l'ordre m inclus sont de carré intégrables, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq m$, on a

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Exemple :

la transformée de Fourier de la fonction dérivée est-il applicable à la fonction $f = \chi_{[-1,1]}(x)$.

12. Application à la résolution des équations aux dérivées partielles.

12.1. équation de la chaleur

soit une tige homogène « très mince » et de longueur infinie, isolée de l'extérieur. On se donne à l'instant $t=0$ la répartition $u_0(x) = u(0,x)$ de la température en chaque point de la tige ($x \in \mathbb{R}$) et on cherche à déterminer son évolution $u(t,x)$ sachant qu'elle vérifie ce qu'on appelle l'équation de la chaleur

$$(C) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

et on cherche une fonction $u(t,x) \in C^{1,2}(]0,+\infty[\times \mathbb{R})$.

- on suppose pour $t>0$ fixé, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|\, dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| dx < \infty$$

de sorte que les fonctions $x \longmapsto u(t,x)$, $x \longmapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$, $x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ ont pour chaque valeur de $t>0$ fixée une transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x.

on suppose de plus que pour $t>0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx\right).$$

on pose pour $t \geq 0$ fixé

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi}\, u(t,x)\, dx.$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\xi) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx - (2\pi i \xi)^2\, \hat{u}(t,\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi}\, u(t,x)\, dx + 4\pi^2 \xi^2\, \hat{u}(t,\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi) + 4\pi^2\xi^2\hat{u}(t,\xi) = 0 \quad ---(*)$$

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}$ est solution de l'equation differentielle par rapport au temps t, la solution est

$$\hat{u}(t,\xi) = c\, e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

pour $t=0 \Rightarrow \boxed{\hat{u}(0,\xi) = c = \hat{u}_0(\xi)}$, donc la solution est

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\, e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

la formule d'inversion de Fourier donne.

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0(\xi)\, e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right)(x)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}_0(\xi)\right)(x) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right)(x)$$

$$= u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad \text{on sait que: } \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

$$= \left(u_0 * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(x), \text{ alors}$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy}$$