Chapitre 03 : Transformation de Laplace

I. Introduction

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certaines équations différentielles est d'utiliser la transformation de Laplace.

La transformation de Laplace transforme des fonctions $f(x)$ en d'autres fonctions $F(S)$, on écrit

$F = \mathcal{L}(f)$ ou $F(S) = \mathcal{L}(f(x))(s)$

La transformation de Laplace inverse transforme $F(S)$ en $f(x)$, on écrit

$f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ ou $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(S))(x)$

On verra plus loin sur quelles fonctions ces transformations sont définies.

La propriété essentielle est que, sous certaines conditions, $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s \cdot F(S)$.

Ainsi, les équations différentielles deviennent des équations algébriques.

2. Fonctions C_L

La classe des fonctions réelles C_L est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.

- une fonction est causale si elle est nulle pour $x < 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.

- Elle continue par morceaux si elle n'admet que des points de discontinuités de première espèce (addmettant une limite à gauche et une limite à droite).

- Elle est d'ordre exponentielle si elle est bornée par une exponentielle i.e. s'il existe des constantes réelles $M \geq 0$ et α telles que

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}, \quad \forall x \geq x_0.$$

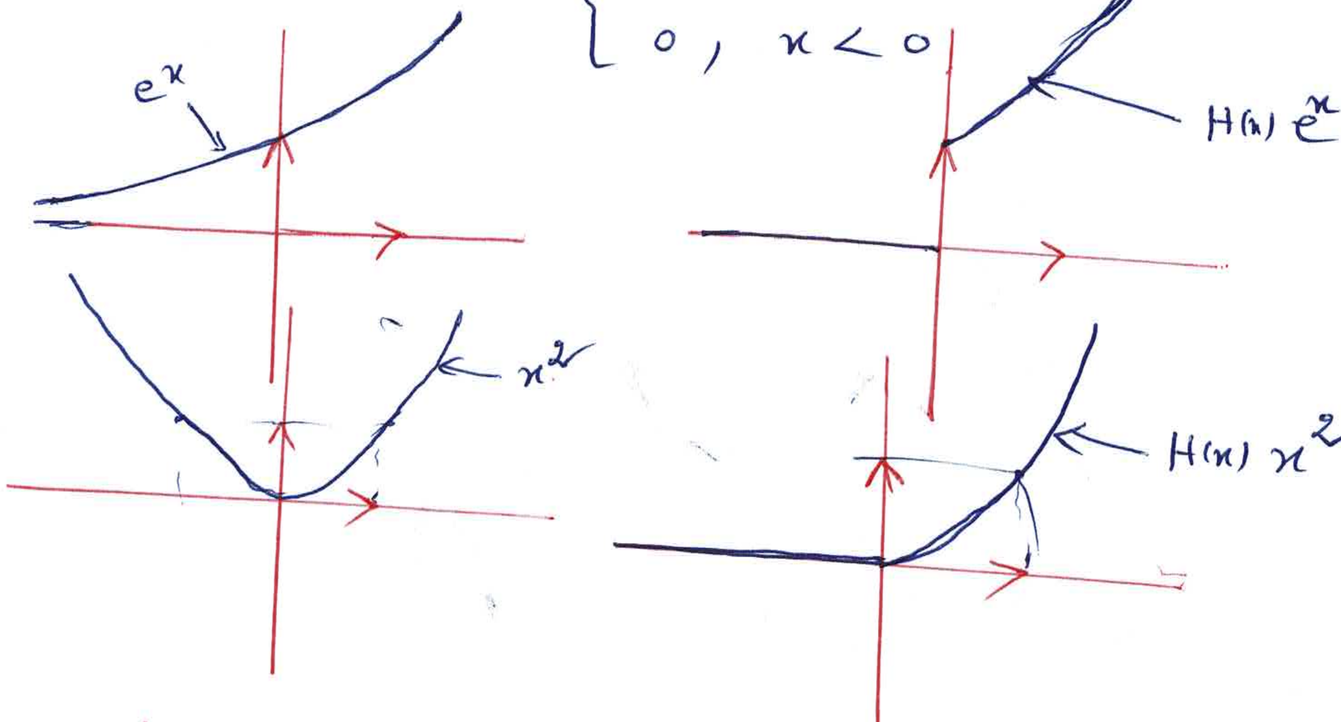
- Les fonctions usuelles $\sin(wx)$, x^2, e^x ne sont pas causales

une façon de créer des fonctions causales est d'utiliser la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

par exemple la fonction $f(x) = e^x$ n'est pas une fonction causale, mais si en multiplier par $H(x)$, on a

$$g(x) = e^x H(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



3. Définition de transformation de Laplace

Définition 3.1

La transformation de Laplace d'une fonction de C_L est définie par : ~~$F(S) = \int$~~

$$\mathcal{L}\left(f(x)\right)(S) = F(S) = \int_0^{+\infty} e^{-Sx} f(x)\, dx$$

S est ici une variable complexe (fréquence) et $F(S)$ une fonction complexe.

Remarques :-

1) F est définie par une intégrale impropre qui ne converge pas toujours si $f \notin C_L$.

2) si f est discontinue en 0, la borne inférieure de l'intégrale devrait être notée 0^+.

Exemple : 1) calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(x) = H(x)\, e^{2x}$

on a : $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{2x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{(2-s)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2-s}\left[e^{(2-s)x} \right]_0^{+\infty}$$

soit $s = \alpha + i\beta$, alors

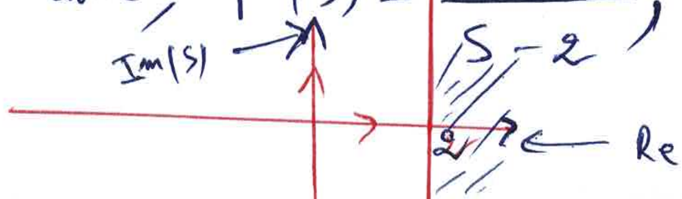
$e^{(2-s)x} = e^{(2-\alpha)x}\, e^{-i\beta x}$, donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left| e^{(2-s)x} \right| = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(2-\alpha)x} = 0$ si $\alpha > 2$, donc

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(2-s)x} = 0$ avec $Re(s) > 2$, alors

$$F(s) = \frac{1}{2-s}\left[e^{(2-s)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2-s}(0-1) = \frac{1}{s-2}$$

donc, $\boxed{F(s) = \frac{1}{s-2}}$, $Re(s) > 2$.



2) $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} H(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx = \frac{-1}{s}\left[e^{-sx}\right]_0^{+\infty}$$

$s = \alpha + i\beta$, $e^{-sx} = e^{-\alpha x}\, e^{-i\beta x}$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left|e^{-sx}\right| = \lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0 \text{ si } \alpha > 0.$$

i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-sx} = 0$ si $Re(s) > 0$

donc, $F(s) = \frac{-1}{s}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$.

i.e. $\boxed{\mathcal{L}\big(H(x)\big)(s) = \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0}$

Théorème 3.2 soit f une fonction définie ~~sur~~ $\mathbb{R}$ et telle que

(i) $f(x) = 0, \quad \forall x < 0$

(ii) f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

(iii) il existe des constantes $M \geq 0$ et r telles que

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x)| \leq M e^{rx}, \text{ alors}$$

la transformé de Laplace de f existe pour tout $Re(s) > r$.

preuve. on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

L'intégrale $\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x)\,dx$ existe car f est continue par morceaux. Concernant l'autre intégrale, notons que

$$\left|e^{-sx} f(x)\right| = \left|e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\right| = e^{-\alpha x}\left|f(x)\right| \leq M e^{-(\alpha-r)x}$$

or $\int_{x_0}^{+\infty} M e^{-(\alpha-r)x}\, dx$ converge car $Re(s) = \alpha > r$, donc d'après le critère de comparaison des intégrales généralisées, l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} \left|e^{-sx} f(x)\right| dx$ converge aussi, ce qui entraine que $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$ existe.

par conséquent $\int_{0}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$ existe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > r\}$.

Exemple : calculer la transformée de Laplace de

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous allons étudier ci-dessous un certain nombre de propriétés élémentaires sur les transformées de Laplace.

propriété 3.3 (linéairité)

La transformée de Laplace est une application linéaire. plus précisément, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pour toutes fonctions f, g d'abscisses de sommabilité respectives r, σ, alors

$$\mathcal{L}(\alpha f(x) + \beta g(x))(s) = \alpha \mathcal{L}(f(x))(s) + \beta \mathcal{L}(g(x))(s)$$
$$= \alpha F(s) + \beta G(s),$$

où $Re(s) > \max(r, \sigma)$.

preuve. En effet, si les fonctions f et g admettent les transformées de Laplace

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx, \quad \mathcal{L}(g(x))(s) = G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$$

alors, on a

$$\mathcal{L}(\alpha f(x) + \beta g(x))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$$
$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx + \beta \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$$
$$= \alpha \mathcal{L}(f(x))(s) + \beta \mathcal{L}(g(x))(s)$$
$$= \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- Si les abscisses de sommabilité de f et g sont respectivement r et σ, alors le domaine de sommabilité sur lequel $\alpha f + \beta g$ est défini est $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max(r, \sigma)\}$

propriété 3.4 (Translation)

Si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$ avec $Re(s) > r$, alors

$$\mathcal{L}(\tau_a f(x))(s) = \mathcal{L}(f(x-a))(s) = e^{-as} F(s), \quad Re(s) > r.$$

preuve. posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x-a), & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

on a

$$\mathcal{L}(g(x))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)\,dx = \int_0^{a} e^{-sx} g(x)\,dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx} g(x)\,dx$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-sx} f(x-a)\,dx$$

on pose $x-a = t$ et $dt = dx$, alors

$$= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= e^{-as} F(s).$$

Exemple : Trouver la transformée de Laplace de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \tau \\ 2, & x > \tau \end{cases}$$

on a : $f(x) = H(x) + H(x-\tau)$ où $H(x)$ est la fonction de Heaviside

Propriété 3.5 : si $F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$, alors

$$\mathcal{L}\left(f(x)\,e^{-\alpha x}\right)(s) = F(s+\alpha), \quad Re(s+\alpha) > r.$$

preuve.

$$\mathcal{L}\left(f(x)\,e^{-\alpha x}\right)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-(\alpha+s)x}\,dx = F(s+\alpha).$$

propriété 3.6 (Changement d'échelle).

si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

preuve. on a

$$\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \int_0^{+\infty} f(\lambda x) e^{-sx} dx \quad , \quad t = \lambda x$$

$$dt = \lambda dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\frac{s}{\lambda} t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

propriété 3.7 (conjugaison complexe)

si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}\left(\overline{f(x)}\right)(s) = \overline{F}\left(\overline{s}\right)$$

preuve. on a

$$\mathcal{L}\left(\overline{f(x)}\right)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \overline{f(x)} dx = \overline{\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\overline{s}x} dx}$$

$$= \overline{F}\left(\overline{s}\right).$$

Exemple : Calculer la transformée de Laplace de

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha x}),\ \alpha \in \mathbb{C},\ \mathcal{L}(\cos ax),\ \mathcal{L}(\sin ax)$$

proposition 3.8

La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > r\}$ et on a la formule

$$F^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^n f(x)\, e^{-sx}\, dx = (-1)^n \mathcal{L}(x^n f(x))$$

Exemple : Déterminer la transformée de Laplace de x^n, d'après la proposition précédente.

on a : $\mathcal{L}(x^n f(x)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$, ici $f(x) = 1$

$$\mathcal{L}(x^n) = (-1)^n \left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} \ldots (*),\quad Re(s) > 0$$

et $\left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(-1)^n s^{n+1}}$, donc

$$\mathcal{L}(x^n) = (-1)^n \times \frac{n!}{(-1)^n s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},\quad Re(s) > 0.$$

4. Transformée de la dérivée

Théorème 3.9

si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$ et si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$,

~~$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+)$~~

et s'il existe $M > 0$ et r telles que

$|f(x)| \leq M e^{rx}$, $\forall x \geq x_0$ alors

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+), \quad Re(s) > r$$

preuve. on a

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)\, dx,$$

En intégrant par parties on obtient

$$\mathcal{L}(f'(x)) = \left[e^{-sx} f(x)\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

comme $\lim_{x \to +\infty} e^{-sx} f(x) = 0$, car

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^{-sx} f(x)\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} |f(x)|, \quad s = \alpha + i\beta$$

$$\leq \lim_{x\to+\infty} M e^{(r-\alpha)x} = 0, \quad Re(s) > r$$

donc, $\left[e^{-sx} f(x)\right]_0^{+\infty} = -f(0^+)$

$f(0^+)$ représentant la limite à droite de $f(x)$ quand $x \to 0$.

D'où $\boxed{\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+)}$

généralisation : Si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème, on a

$$\mathcal{L}(f''(x))(s) = s\,\mathcal{L}(f'(x)) - f'(0^+)$$
$$= s\left(sF(s) - f(0^+)\right) - f'(0^+)$$

d'où

$$\mathcal{L}(f''(x))(s) = s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+)$$

on peut démontrer par la récurrence que :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0^+)$$

cas particulier, si $f(0^+) = f'(0^+) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x))(s) = s^n F(s).$$

~~propriété~~ :

Remarque :

En général, si $f(x)$ est discontinue aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alors

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+) - \sum_{k=1}^{n} e^{-s x_k}\left(f(x_k^+) - f(x_k^-)\right)$$

proposition 3.10 Si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)(s) = \frac{F(s)}{s}, \quad Re(s) > \max(0, r)$$

preuve. posons $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. D'après le précédent

on a : $\mathcal{L}(g'(x))(s) = s\,\mathcal{L}(g(x))(s) - g(0^+) = s\mathcal{L}(g(x))(s)$

car $g(0)=0$, or $g'(x)=f(x)$, d'où $\mathcal{L}(g'(x))=\mathcal{L}(f(x))$

on en déduit que : $s\mathcal{L}(g(x))=\mathcal{L}(f(x))$

i.e. $\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)(s)=\dfrac{\mathcal{L}(f(x))}{s}=\dfrac{F(s)}{s}$.

5. Transformation de Laplace inverse

soit $F(s)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(x)$.

on appelle transformée de Laplace inverse, ou original de $F(s)$, la fonction $f(x)$.

on note $f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$

Exemple :

1) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)(x)=x\,H(x)$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)(x)=\cos(2x)\,H(x)$, car $\mathcal{L}(\cos ax)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$

- on démontre que si les fonctions f considérées possèdent les propriétés énoncées au début du chapitre, i.e.
  - continue par morceaux sur tout fermé $[0,x_0]$.
  - d'ordre exponentiel

L'original $f(x)$ d'une fonction $F(s)$ est unique sur tout sous-ensemble où il est continue.

La recherche de l'original conduit à étudier les propriétés de l'application $F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(x)$ appelée transformation de Laplace inverse.

6. Propriétés de la transformation de Laplace inverse

1. Linéarité

L'inverse d'une application linéaire étant linéaire

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s))(x) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G(s))(x)$$

• D'une façon générale pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, on utilise sa décomposition en éléments simples

Exemple : Trouver l'original de $F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$

La décomposition de $F(s)$ s'écrit

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

le calcul donne $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$

d'où $f(x) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(x) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

i.e. $f(x) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x)\right) H(x)$ (14)

2. original de $F(as)$, $a>0$

soit $f(x)$ l'original de $F(s)$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)(x) \text{, on a}$$

$$F(as) = \int_0^{+\infty} e^{-asx} f(x)\,dx \text{, } \quad y = ax \Rightarrow dy = a\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-sy} f\left(\frac{y}{a}\right) dy$$

d'où $F(as) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(s)$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(s)$$

i.e. $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\big(F(as)\big)(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)}$

3. original de $F(s+a)$.

soit $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)(x)$, on a

$$F(s+a) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)x} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\left(e^{-ax} f(x)\right) dx$$

$$= \mathcal{L}\left(e^{-ax} f(x)\right)(s)$$

donc, $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\big(F(s+a)\big)(x) = e^{-ax} f(x)}$

par exemple

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+a}{(s+a)^2+a^2}\right)(x) = e^{-ax}\cos(ax), \quad x>0 \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{a}{(s+a)^2+a^2}\right)(x) = e^{-ax}\sin(ax), \quad x>0 \end{cases}$$

Exercice : Trouver l'original de

$$F(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$$

on peut écrire

$$\frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

donc ; $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)(x) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)(x)$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ x \geq 0$$

4. Original de $F(s) \times G(s)$

Théorème 3.11 : si $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ et $\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(x)$, alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s) \times G(s)\right)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$$

L'intégrale $\int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$ est appelée produit de convolution de f par g est notée $(f*g)(x)$

on vérifiera que : $(f*g)(x) = (g*f)(x)$

Exemple : l'original de $\frac{1}{s^2(s+1)}$

on a : $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = x$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-x}$

d'où $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right) = \int_0^x t\cdot e^{-(x-t)}\, dt$

5. Tableaux de quelques fonctions usuelles

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$
$H(x)$	$\frac{1}{s}$, $Re(s)>0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $Re(s)>a$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $Re(s)>0$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $Re(s)>0$
x^α, $\alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $Re(s)>0$
x^n, $n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $Re(s)>0$
$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{-ax}f(x)$	$F(s+a)$
$f(x-a)\,H(x-a)$	$e^{-as}F(s)$

6. Application de la transformation de Laplace aux équations différentielles

soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants : $a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x)$

soit $\mathcal{L}(y(x))(s) = Y(s)$, alors

$\mathcal{L}(y'(x))(s) = sY(s) - y(0)$

$\mathcal{L}(y''(x))(s) = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$

et plus généralement :

$\mathcal{L}(y^{(n)}(x))(s) = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0).$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente, on obtient donc, par suite de la linéarité : $(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) Y(s) + \phi(s) = F(s)$

équation dans laquelle $\phi(s)$ représente un polynôme de degré $(n-1)$ en s contenant $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$.

on en déduit : $Y(s) = \dfrac{F(s) - \phi(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$

et par conséquent, en appliquant la transformation inverse

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(x)$$

Exemple : Trouver la solution de l'équation suivante

$$y'' - 2y' + y = x e^{x} \quad (1), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

soit $\mathcal{L}(y(x))(s) = Y(s)$, donc $\mathcal{L}(y'(x))(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$

$\mathcal{L}(y''(x))(s) = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s.$

En appliquant la transformée de Laplace à (1), on obtient

$\mathcal{L}(y''(x))(s) - 2\mathcal{L}(y'(x))(s) + \mathcal{L}(y(x))(s) = \mathcal{L}(x e^{x})(s)$

$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 2sY(s) + 2 + Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow (s^2 - 2s + 1)Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2} + s - 2$

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2} + s - 2\right] = \dfrac{1}{(s-1)^4} + \dfrac{s-2}{(s-1)^2} = \dfrac{1}{(s-1)^4} - \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{s-1}$

$\Rightarrow y(x) = e^{x}\left(\frac{1}{6}x^3 - x + 1\right)$

7. Résolution des équations intégrales

La transformée de Laplace permet d'étudier un grand nombre d'équations intégrales.

- Une équation intégrale de Volterra de seconde espèce est une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_0^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = g(x)$$

où g, k sont des fonctions connues et φ une fonction inconnue. la fonction k est le noyau de cette équation. on considère le cas où le noyau dépend seulement de la différence $x-t$, i.e. $k(x,t) = k(x-t)$ avec k à support dans $\mathbb{R}_+$. Soient F, G et K les transformées de Laplace respectives de φ, g et k.

En appliquant aux deux membres de l'équation ci-dessus la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(\varphi(x))(s) - \mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt\right\}(s) = \mathcal{L}(g(x))(s), \text{ alors}$$

$$\mathcal{L}(\varphi(x))(s) - \mathcal{L}\{(k*\varphi)(x)\}(s) = \mathcal{L}(g(x))(s)$$

d'où

$F(s) - K(s)F(s) = G(s)$. par conséquent

$$F(s) = \frac{G(s)}{1-K(s)}, \quad K(s) \neq 1.$$

l'original $\varphi(x)$ de $F(s)$ est la solution de l'équation intégrale.

Exemple: Déterminer la solution de l'équation intégrale suivante : soit $F(s) = \mathcal{L}(\varphi(x))(s)$

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2 \quad ---(1)$$

l'equation (1) s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) - \sin x * \varphi(x) = x^2, \quad x \geq 0.$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres, on a

$$F(s) - \frac{1}{s^2+1}F(s) = \frac{2}{s^3}, \quad Re(s) > 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s^5} + \frac{2}{s^3}, \quad Re(s) > 0$$

8. Résolution des équations aux dérivées partielles :

La méthode de la transformée de Laplace peut être utilisé pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles comme le ~~m~~ montre l'exemple suivant

Exemple : Résoudre l'equation suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{, avec}$$

$u(x,0) = \sin x$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

Soit $U(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t)\, dt$ la transformée de Laplace de $u(x,t)$. on a

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)(s) \text{ ---- } (*)$$

on a : $\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dt$

et puisque $\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0)$, alors

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(s) = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) - \sin x$$

et

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x,t)\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dt$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t)\, dt$$

$$= \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}$$

Alors,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = s\,U(x,s) - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s\,U(x,s) = -\sin x$$

c'est une équation différentielle de second ordre à coefficient constant, alors

$$U(x,s) = y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$(H) : \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s\,U(x,s) = 0 \Leftrightarrow r^2 - s = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{s},\ r_2 = -\sqrt{s}$$

alors, $y_H(x) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_p = \frac{\sin x}{1+s}$

donc, $U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{\sin x}{1+s}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

on a : $U(0,s) = c_1 + c_2$ et $U(\pi,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,\pi}$

on a aussi : $U(0,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(0,t)\,dt = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad --- (1)$$

et $U(\pi,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(\pi,t)\,dt = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$

$$\Rightarrow c_1 e^{\sqrt{s}\,\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,\pi} = 0 \quad --- (2)$$

de (1) et (2) $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$, donc

$$U(x,s) = \frac{\sin x}{1+s}, \text{ donc}$$

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(U(x,s)\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+s}\right)(t) = \sin x\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s}\right)(t)$$
$$= e^{-t}\sin x$$

Q2)