

### Chapitre 3 : Arbres Et Axes (3 semaines)

- ❖ Calcul du diamètre préalable des axes et arbres
- ❖ Vérification des arbres et axes à la fatigue

#### 3.1. Définitions:

##### Axes et arbres de transmission

Un axe est une pièce révolutionnaire rectiligne de section circulaire sur laquelle tourne ou oscille une pièce mobile, comme par exemple une roue, un coussinet de palier, un levier, etc.

Un arbre est une barre révolutionnaire rectiligne et mobile, généralement cylindrique, transmettant un couple de torsion  $M_t$  à la vitesse angulaire  $w$ .

#### 3.2. Calcule sur les arbres et les bouts d'arbres

##### 3.2.1. Les arbres:

Un arbre de transmission se calcule ou se vérifie à l torsion, et éventuellement à la flexion ou à la flexion-torsion

- ❖ **Torsion:** Condition de résistance:  $\tau = (M_t / (I_0/v)) \leq R_{pg}$

Concentration de contrainte au droit des accidents de formes:  $\tau_{max} = \tau_{calculé} \times k \leq R_g$

Condition de déformation:  $M_t = G \theta I_0$

$\tau$ : Contrainte de glissement (N/mm<sup>2</sup>)

$\theta$ : Angle unitaire de torsion (rad / m)

$M_t$ : moment de torsion maxi ou moment idéal max (N . m)

$$M_t = F \text{ tangential } \times \text{ rayon (statique)} = P / \omega$$

$$M_t = M_{mot} - M_{res} = J . \omega' = P / \omega$$

P: puissance transmise (W)

$\omega$ : vitesse angulaire (rad / s)

J: moment d'inertie ( kg . m<sup>2</sup>)

$\omega'$ : Accélération angulaire (rad / s<sup>2</sup>)

$I_0$ : moment quadratique de la section considérée / au centre O:

Pour un arbre cylindrique:  $I_0 = (\pi d^4) / 32 \text{ m}^4$

$I_0 / v$ : module de flexion, ( $v = d / 2$ );  $(I_0/v)_n = ((\pi d^3) / 16) \text{ m}^3$

$R_{pg}$ : résistance pratique au cisaillement ( N / m<sup>2</sup>)

G: coefficient d'élasticité transversale pour arbre courant 8 à 8,8 . 10<sup>10</sup> N/ m<sup>2</sup> OU Pa

- ❖ **Flexion**

Condition de résistance  $\sigma = ( M_f / ( I_{xx'} / v )) \leq R_p$

$\sigma$ : contrainte de flexion

$M_f$ : moment de flexion maximum N.m

$I_{xx'}$ : moment quadratique de la section considérée par rapport à l'axe diamétral  $xx'$

Pour un arbre cylindrique:  $I_{xx'} = (\pi d^4 / 64) \text{ m}^4$

$I / v$ : module de flexion,  $(I/v) = ((\pi d^3) / 32) \text{ m}^3$

$R_p$ : résistance pratique à l'extension (N . m<sup>2</sup>)

❖ **Flexion- torsion**

Utiliser le calcul à la flexion avec:

Pour les aciers:  $M_{fi} = ((M_f)^2 + (M_t)^2)^{1/2}$

Pour les fonte:  $M_{fi} = 1/2 M_t + 1/2((M_f)^2 + (M_t)^2)^{1/2}$

**3.2.1. Les bouts d'arbres: Figure 3.1**

- Cylindriques lisse
- Coniques avec extrémité filetée ou taraudée avec ou sans clavetage (clavettes parallèles)
- Existent en deux series:
  - \* Longues (usuelles)
  - \* Courtes;
- Vérification ou calcul à la torsion:  $d \geq ((16 M_f) / (II. R_{pg}))^{1/3}$

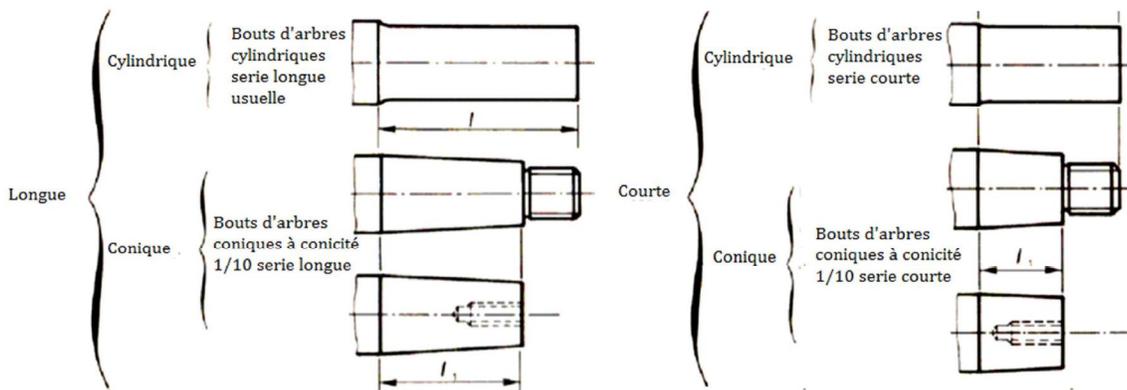
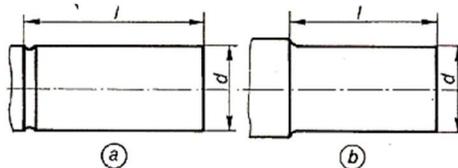


Figure 3.1 Types des bouts d'arbres. [6]

❖ **Bouts d'arbres cylindriques**

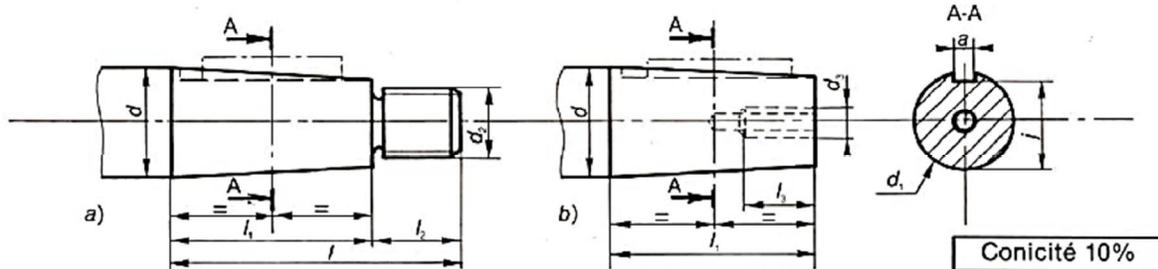


| Diamètre d |     | l type |       | Diamètre d |     | l type |       | Diamètre d |     | l type |       |
|------------|-----|--------|-------|------------|-----|--------|-------|------------|-----|--------|-------|
| nom        | tol | long   | court | nom        | tol | long   | court | nom        | tol | long   | court |
| 6          |     | 16     | —     | 28         | j 6 | 60     | 42    | 70         |     |        |       |
| 7          |     | —      | —     | 30         |     |        |       | 71         |     | 140    | 105   |
| 8          |     | 20     | —     | 32         |     | 80     | 58    | 75         |     |        |       |
| 9          |     | —      | —     | 35         |     |        |       | 80         |     |        |       |
| 10         |     | 23     | 20    | 38         | k 6 |        |       | 85         |     | 170    | 135   |
| 11         |     | —      | —     | 40         |     |        |       | 90         |     |        |       |
| 12         |     | 30     | 25    | 42         |     |        |       | 95         |     |        |       |
| 14         | j 6 | —      | —     | 45         |     |        |       | 100        | m 6 |        |       |
| 16         |     | 40     | 28    | 48         |     | 110    | 82    | 110        |     | 210    | 165   |
| 18         |     | —      | —     | 50         |     |        |       | 120        |     |        |       |
| 19         |     | —      | —     | 55         |     |        |       | 125        |     |        |       |
| 20         |     | 50     | 36    | 56         |     |        |       | 130        |     |        |       |
| 22         |     | —      | —     | 60         | m 6 |        |       | 140        |     | 250    | 200   |
| 24         |     | 60     | 42    | 63         |     | 140    | 105   | 150        |     |        |       |
| 25         |     | —      | —     | 65         |     |        |       | 160        |     | 300    | 240   |

❖ **Bouts d'arbres coniques**

Peuvent être utilisées:

- \* Avec extrémité filetée
- \* Avec extrémité taraudée



| d  | Filetage       |                | Taraudage      |                | Section clavette<br>a x b | a <sub>1</sub> | Série longue |                |                |       | Série courte |                |                |      |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------|--------------|----------------|----------------|-------|--------------|----------------|----------------|------|
|    | d <sub>2</sub> | l <sub>2</sub> | d <sub>3</sub> | l <sub>3</sub> |                           |                | l            | l <sub>1</sub> | d <sub>1</sub> | j     | l            | l <sub>1</sub> | d <sub>1</sub> | j    |
| 6  | M 4            | 6              |                |                |                           |                | 16           | 10             |                |       |              |                |                |      |
| 8  | M 6            | 8              |                |                |                           |                | 20           | 12             |                |       |              |                |                |      |
| 10 | M 6            | 8              |                |                |                           |                | 23           | 15             |                |       |              |                |                |      |
| 12 | M 8 x 1        | 12             | M 4            | 10             | 2 x 2                     | 2              | 30           | 18             | 11,1           | 9,9   |              |                |                |      |
| 14 | M 8 x 1        | 12             | M 4            | 10             | 3 x 3                     | 3              | 30           | 18             | 13,1           | 11,3  |              |                |                |      |
| 16 | M 10 x 1,25    | 12             | M 4            | 10             | 3 x 3                     | 3              | 40           | 28             | 14,6           | 12,8  | 28           | 16             | 15,2           | 13,4 |
| 18 | M 12 x 1,25    | 12             | M 5            | 13             | 4 x 4                     | 4              | 40           | 20             | 16,6           | 14,1  | 28           | 16             | 17,2           | 14,7 |
| 20 | M 12 x 1,25    | 14             | M 6            | 16             | 4 x 4                     | 4              | 50           | 36             | 18,2           | 15,7  | 36           | 22             | 18,2           | 16,4 |
| 22 | M 12 x 1,25    | 14             | M 6            | 16             | 4 x 4                     | 4              | 50           | 36             | 20,2           | 17,7  | 36           | 22             | 18,9           | 18,4 |
| 24 | M 12 x 1,25    | 14             | M 6            | 16             | 5 x 5                     | 5              | 50           | 36             | 22,2           | 19,2  | 36           | 22             | 22,9           | 19,9 |
| 25 | M 16 x 1,25    | 18             | M 8            | 19             | 5 x 5                     | 5              | 60           | 42             | 22,9           | 19,9  | 42           | 24             | 23,8           | 20,8 |
| 28 | M 16 x 1,25    | 18             | M 8            | 19             | 5 x 5                     | 5              | 60           | 42             | 25,9           | 22,9  | 42           | 24             | 26,8           | 23,8 |
| 30 | M 20 x 1,5     | 22             | M 10           | 22             | 5 x 5                     | 5              | 80           | 58             | 27,1           | 24,1  | 58           | 36             | 28,2           | 25,2 |
| 32 | M 20 x 1,5     | 22             | M 10           | 22             | 6 x 6                     | 6              | 80           | 58             | 29,1           | 25,6  | 58           | 36             | 30,2           | 26,7 |
| 35 | M 20 x 1,25    | 22             | M 10           | 22             | 6 x 6                     | 6              | 80           | 58             | 32,1           | 28,6  | 58           | 36             | 33,2           | 29,7 |
| 38 | M 24 x 2       | 22             | M 12           | 28             | 6 x 6                     | 6              | 80           | 58             | 35,1           | 31,6  | 58           | 36             | 36,2           | 32,7 |
| 40 | M 24 x 2       | 28             | M 12           | 28             | 10 x 8                    | 10             | 110          | 82             | 35,9           | 30,9  | 82           | 54             | 37,3           | 32,3 |
| 42 | M 24 x 2       | 28             | M 12           | 28             | 10 x 8                    | 10             | 110          | 82             | 37,9           | 32,9  | 82           | 54             | 39,3           | 34,3 |
| 45 | M 30 x 2       | 28             | M 16           | 36             | 12 x 8                    | 12             | 110          | 82             | 40,9           | 35,9  | 82           | 54             | 42,3           | 37,3 |
| 48 | M 30 x 2       | 28             | M 16           | 36             | 12 x 8                    | 12             | 110          | 82             | 43,9           | 38,9  | 82           | 54             | 45,3           | 40,3 |
| 50 | M 35 x 3       | 28             | M 16           | 36             | 12 x 8                    | 12             | 110          | 82             | 45,9           | 40,9  | 82           | 54             | 47,3           | 42,3 |
| 55 | M 36 x 3       | 28             | M 20           | 42             | 14 x 9                    | 14             | 110          | 82             | 50,9           | 45,4  | 82           | 54             | 52,3           | 46,8 |
| 56 | M 36 x 3       | 28             | M 20           | 42             | 14 x 9                    | 14             | 110          | 82             | 51,9           | 46,4  | 82           | 54             | 53,3           | 47,8 |
| 60 | M 42 x 3       | 35             | M 20           | 42             | 16 x 10                   | 16             | 140          | 105            | 54,75          | 48,75 | 105          | 70             | 56,5           | 50,5 |
| 63 | M 42 x 3       | 35             | M 20           | 42             | 16 x 10                   | 16             | 140          | 105            | 57,75          | 51,75 | 105          | 70             | 59,5           | 53,5 |

**3.3. Notion de moment idéal**

La plupart des arbres sont soumis à la fois à de la flexion et de la torsion. Dans la majorité des cas, l'arbre tourne par rapport à la direction du moment de flexion. Comme l'illustre la figure 3.2, il en résulte que la contrainte de flexion en un point A varie constamment entre un maximum positif et un minimum négatif de même grandeur. On dit que l'arbre est soumis à la fatigue. La résistance à la fatigue, mesurée par la contrainte maximale  $f$  au cours du cycle menant à la rupture, est plus faible que la résistance statique et même que la limite élastique. À cela s'ajoutent les concentrations de contrainte, si bien qu'il faut se limiter, au niveau de l'avant-projet, à des contraintes admissibles assez basses.

La combinaison du moment de flexion et du moment de torsion se traite souvent à l'aide de la notion de moment idéal. L'idée est la suivante. À un moment de flexion  $M_f$  est associée une contrainte de flexion.

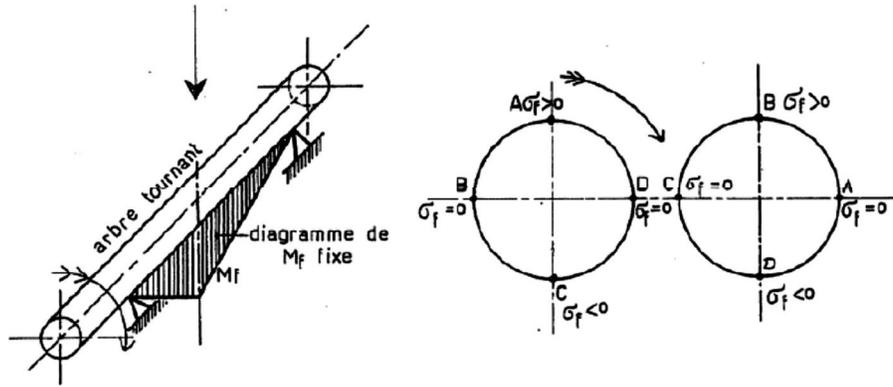


Figure 3.2. Fatigue d'un arbre tournant soumis à un moment de flexion de direction constante. [7]

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

La contrainte de torsion est quant à elle égale à

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

Pour l'étude de leur action combinée, on a besoin d'un critère de mise hors service. Il est généralement admis qu'il a la forme

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f,lim}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,lim}}\right)^2 = 1 \quad \text{Equation 1}$$

Ce qui généralise le critère de von Mises. Ici,  $\sigma_{f,lim}$  et  $\tau_{t,lim}$  sont les contraintes qui mèneraient à la mise hors service pour la flexion seule ou la torsion seule, respectivement. En définissant le facteur

$$\alpha = \frac{\sigma_{f,lim}}{\tau_{t,lim} \sqrt{3}}$$

on peut transformer le critère (**Equation 1**) en

$$\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2 = \sigma_{f,lim}^2$$

Ce qui, si l'on introduit la notion de contrainte idéale

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2} \quad \text{Equation 2}$$

S'écrit simplement

$$\sigma_i = \sigma_{f,lim}$$

En service, on se limitera à une contrainte plus faible, c'est-à-dire que l'on adoptera une *pseudo-sécurité*  $s^*$  et que l'on travaillera avec une contrainte admissible.

$$\sigma_{f,adm} = \frac{\sigma_{f,lim}}{s^*}$$

Si nous parlons de pseudo-sécurité, c'est parce que ce premier calcul ne tient pas compte des concentrations de contrainte. Mais ces dernières ne pourront être déterminées que lorsqu'on aura entièrement dessiné l'arbre, ce qui est précisément ce que nous nous attachons à faire. Il est clair qu'il faudra *in fine* vérifier la résistance de façon plus précise. Le critère provisoire est donc

$$\sigma_i = \sigma_{f,adm}$$

Multiplions les deux membres de la définition (**équation 2**) de la contrainte idéale par  $(\pi d^3 / 32)$  On a

$$\frac{\pi d^3}{32} \sigma_f = M_f \quad \text{et} \quad \frac{\pi d^3}{32} \tau_t = \frac{1}{2} M_t$$

Si l'on appelle encore moment idéal le moment défini par

$$M_i = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_i$$

on a donc

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75\alpha^2 M_t^2}$$

et le critère provisoire de résistance s'écrit

$$M_i = M_{f,adm} \quad \text{avec} \quad M_{f,adm} = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_{f,adm}$$

Pour une sollicitation statique, à vérifier par exemple quant au risque de plastification, le critère de von Mises s'applique, ce qui correspond à  $\alpha = 1$ . En fatigue, il faut se référer à la limite d'endurance qui, pour les aciers, peut être évaluée comme suit, en fonction de la limite de rupture  $R_m$  : si  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_M$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de la contrainte lors d'un cycle, notons

$$\mathcal{R}_f = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_M}$$

On peut admettre

$$\sigma_{f,lim} \approx R_m \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathcal{R}_f \right)$$

On admet de même la relation

$$\tau_{t,lim} \sqrt{3} \approx R_m \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathcal{R}_t \right)$$

avec  $R_t = \tau_{min} = \tau_M$ .

Dans bon nombre de cas, la contrainte de flexion est alternée et le moment de torsion constant en valeur nominale. Cependant, comme il faut tenir compte des démarrages, des freinages et des à-coups inévitables provenant du moteur et du récepteur, on juge généralement qu'il est plus prudent de faire le calcul avec un moment de torsion pulsé ( $R_t = 0$ ). Dans ce cadre, on a

$$\sigma_{f,lim} = 0,5R_m, \quad \tau_{t,lim} \sqrt{3} = 0,75R_m, \quad \alpha = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}$$

Ce qui donne

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} M_t^2} = \sqrt{M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2}$$

C'est cette expression du moment idéal que nous adopterons dans tous les cas courants. Il convient de noter que la valeur

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75M_t^2}$$

que l'on trouve si souvent dans les cours de résistance des matériaux est obtenue dans le cadre d'un calcul à la déformation plastique. En fatigue, elle ne vaut que si  $(\tau_m / \tau_M) = (\sigma_m / \sigma_M)$  soit, pour un arbre tournant par rapport aux charges, si le moment de torsion est également alterné, ce qui est exceptionnel.

### 3.4 Une première formule de dimensionnement en fatigue

Pour un arbre tournant par rapport à la charge, on peut dans un premier temps choisir le diamètre par la formule

$$\frac{d}{mm} = 42,8 \frac{\left( \frac{M_i}{Nm} \right)^{0,352}}{\left( \frac{R_m}{MPa} \right)^{1/3}}$$

La valeur un peu inattendue de l'exposant du numérateur, 0,352, s'explique par le fait que pour établir cette formule, il a été tenu compte d'un certain facteur d'échelle. Le calcul peut se faire graphiquement grâce au diagramme que l'on trouvera dans les Mémentos.