

III. 1 Introduction

في سنة 1905 استطاع العامل (Prandtl) أن يكتشف أن سرعة انسياب المائع على سطوح أجسام صلبة تتزايد من الصفر بالقرب من سطح الجسم الذي ينساب عليه إلى أن تبعد عنه بمقدار معين سمكه صغير جدا مقارنة بأبعاد السطح المنساب عليه يسمى هذا السمك بسمك الطبقة الحدية ( $\delta_x$ ) (Epaisseur de la couche limite dynamique) حيث أن خارج هذا السمك (الطبقة) تكون سرعة المائع مساوية لسرعته الأصلية  $U_\infty$  أو  $V_0$  (Fig.1).

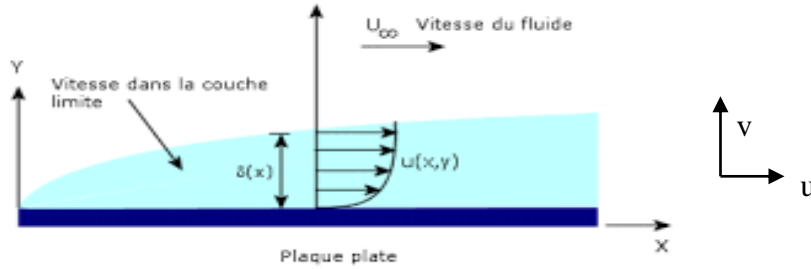


Fig.1. couche limite

هذا يعني أن تأثير اللزوجة (قوة الاحتكاك الناتجة عن اللزوجة) يكون مهما ومعتبرا في هذه الطبقة الحدية إما خارج هذه الطبقة فإنه يكون مهملًا وبالتالي فإن المائع يعتبر مائع مثالي وذلك لأن خواص الانسياب لم تتأثر. وكذلك بالنسبة لدرجة الحرارة فإن درجة الحرارة داخل المائع تتغير داخل طبقة سمكها يكون صغير جدا ( $\delta_{th}$ ) تسمى بالطبقة الحدية الحرارية (couche limite thermique), (fig.2). وان سمك الطبقتين الحديتين (الديناميكية والحرارية) يتوقف على طبيعة المائع أي على قيمة عدد Pr هذا يعني انه يمكن ان يكون  $\delta_{th} < \delta_D$  والعكس.

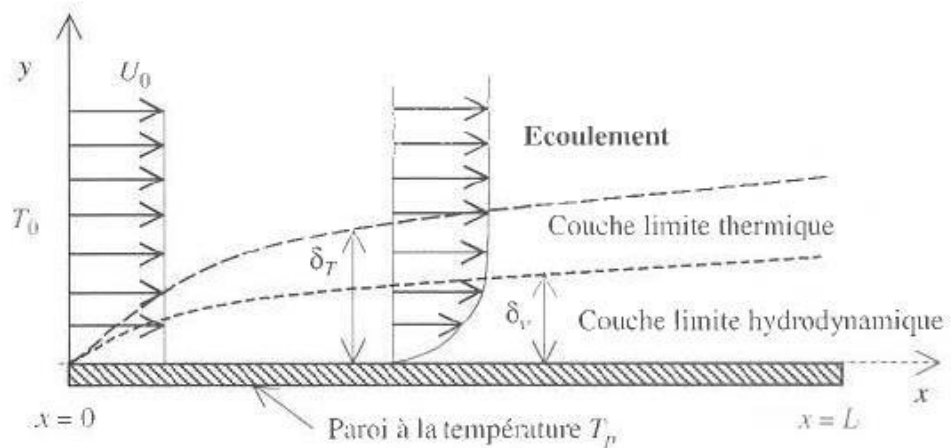


Fig.2. couche limite thermique et dynamique

### III. 2. Les hypothèses de la couche limite

لنعتبر مائع ينساب على سطح صلب ثنائي الأبعاد حيث  $ox$  موازي للانسياب و  $oy$  ناظمي عليه.  
 - بما أن سمك الطبقة الحدية صغير جدا أمام أبعاد هذا السطح الطول والعرض أو القطر فإن Prandtl استطاع أن يتوصل إلى الفرضيات التالية :

بما أن  $v \ll u$  داخل الطبقة الحدية فإن تغيرات  $v$  بالنسبة ل  $x$  و  $y$  يمكن إهمالها أمام الحدود الأخرى ( )  $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$

- بما أن تأثير اللزوجة يكون معتبرا في اتجاه الناظم  $oy$  فإن :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وكذلك بالنسبة لدرجة الحرارة  $\frac{\partial T}{\partial y} \ll \frac{\partial T}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

بهذه الفرضيات يمكننا الحصول على معادلات الطبقة الحدية (Les équations de la couche limite)

### III.3 Les équations de conservation

Utilisant les **approximations** suivantes pour un fluide en mouvement sur une plaque horizontale en régime permanent:

À l'entrée de la plaque et hors de la couche limite  $u \ll v_0$  ou  $U_\infty$

$\partial y \ll \delta$  (la variation de  $y$  = l'épaisseur de la couche limite) et  $\partial x \ll L$

#### III.3.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On utilise les approximations données et aussi  $\partial u \ll v_0$  ou  $U_\infty$  et  $\partial v \approx v_0$ , on a:

$$(III.1) \quad \frac{v_0}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \rightarrow v = v_0 \cdot \frac{\delta}{L}$$

(on prend le signe positive)

#### III.3.2. Equation du mouvement:

$$\text{sur } ox: \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (III.2)$$

Introduisant les approximations sur l'équation (III.2) :

$$\rho \left( v_0 \frac{v_0}{L} + \left( v_0 \frac{\delta}{L} \right) \frac{v_0}{\delta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left( \frac{v_0}{L^2} + \frac{v_0}{\delta^2} \right)$$

$$\rightarrow \rho \left( \frac{v_0^2}{x} + \frac{v_0^2}{x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left( \frac{v_0}{x^2} + \frac{v_0}{\delta^2} \right)$$

Le terme  $\frac{v_0}{L^2} \approx \frac{v_0}{\delta^2}$  alors on peut négliger le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  devant  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Alors l'équation (III.2) devient :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

$$\text{sur } oy : \quad \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

le terme  $u \frac{\partial v}{\partial x} \approx v_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$  car  $\delta \approx L$

de même pour le terme :  $v \frac{\partial v}{\partial y} \approx v_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$

le terme  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx v_0 \frac{\delta}{L^2} \approx 0$

et le terme  $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  peut être négligé devant les force de pression, alors l'équation (III.4) peut s'écrire :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y \quad (\text{III.5})$$

### Estimation de l'épaisseur de la couche limite dynamique:

Les forces de viscosité contrebalancent localement l'inertie du fluide, on peut déterminer l'épaisseur de la couche limite en utilisant l'équation (III.3) par:

تؤدي اللزوجة إلى موازنة القصور الذاتي للسائل محليًا ومنه يمكن ان نستعمل التقريب التالي.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \rightarrow \frac{V_o^2}{x} \approx \frac{\mu V_o}{\rho \delta^2} = \nu \frac{V_o}{\delta^2}$$

$$\rightarrow \delta(x) = x / \sqrt{\frac{V_o \cdot x}{\nu}} = x / \sqrt{\text{Re}_x}$$

### III.3.3 Equation de l'energie:

$$\rho \cdot c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \phi \quad (\text{III.6})$$

### Approximations :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \Phi \ll \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

avec ces approximations, l'équation (III.6) peut s'écrire :

$$\rho \cdot c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{III.7})$$

### Conclusion

Avec ces hypothèses, les équations de conservation dans la couche limite sont :

#### 1. Équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

#### 2. Equation du mouvement:

$$\text{sur } ox: \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot F_x + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{sur } oy: \quad 0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot F_y$$

#### 3. Equation de l'énergie:

$$\rho \cdot c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

### III.4 Cas de la convection forcée

Dans ce cas, la force de poids est négligeable devant la force de pression et de frottement ( $\rho F_i = 0$ ), et les équations de conservation dans la couche limite sont :

#### III.4.1 Equation du mouvement

$$\text{sur } oy: \quad 0 = - \frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow p = p(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

$$\text{sur } ox: \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

#### III.4.2 Equation d'énergie

$$\rho \cdot c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

### III.5 Cas de la convection naturelle

Dans la convection naturelle, la force de poids ( $\rho F_x = -\rho g$ ) et ( $\rho F_y = 0$ ), on considère que  $ox$  est l'axe verticale. (fig.3)

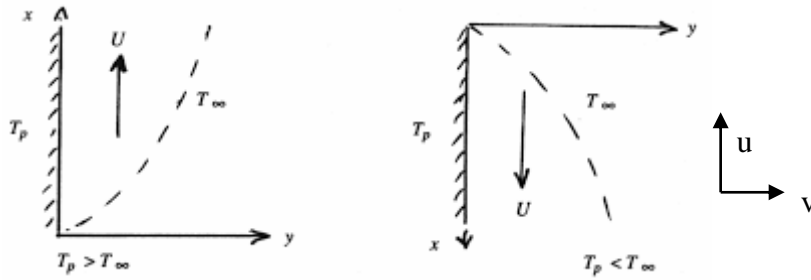


Fig.3 couche limite (convection naturelle)

إذا كانت درجة حرارة الصفيحة  $T_p$  اكبر من درجة حرارة المائع عندئذ فان كثافة المائع تقل وبالتالي يصعد نحو الأعلى وفي الحالة المعاكسة فان المائع ينزل نحو الأسفل بازدياد كثافته .

#### III.5.1 Equation du mouvement

$$\text{sur } ox: \quad \rho_o \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} - \rho g + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Dans la convection naturelle, le terme  $\rho g$  est remplacé par :

$$\rho_o [1 - \beta(T - T_o)] \cdot g \quad (\text{approximation de Boussinesq})$$

$$\text{sur } oy: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

#### III.5.2 Equation de l'énergie

$$\rho_o \cdot c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$