Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2020/2021

Cours 01: Espace de probabilités et probabilité simples

Définition (*Expérience aléatoire*)

Nous appellerons expérience aléatoire, une expérience qui possède les deux propriétés suivantes:
a) on ne peut prévoir avec certitude les résultats de l'expérience,
b) on peut décrire, avant toute expérimentation, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

On note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expériece aléatoire.

Notation: L'ensemble Ω connu par le nom: *Univers* ou *Ensemble fondamental*, il provient toujours d'une expérience aléatoire.

Définition (*Algèbre d'événements*)

Étant donné un ensemble Ω, on appelle algèbre d'événements (*tribu*) toute famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω telle que :
1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{F}$: on a $A^c \in \mathcal{F}$
3. Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, on a $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle *espace probabilisable*.

Remarque.
1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. On a $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$, pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$.

Terminologie probabiliste.
- Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les événements.
- Ω : l'événement certain.
- $\varnothing$: l'événement impossible.
- A^c : l'événement contraire de A.
- A et B sont incompatibles (disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.
- L'événement élémentaire est tout ensemble $\{w\} \in \mathcal{F}$ avec $w \in \Omega$.
- Un événement A est dit réalisé lorsque le résultat de l'expérience appertient à A.

Exemples.

1. Algèbre d'événements grossière: $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$
2. Algèbre de Bernouilli (ou alternative) : $\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$.
3. Algèbre d'événements la plus fine (tribu discrète) : $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque.

En pratique, l'univers Ω se définit en fonction de l'expérience aléatoire effectuée, et la tribu se choisit en fonction des évènements concernés par le problème. En général, on considère l'ensemble fondamental Ω muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples concrets.

1. Dans une expérience, on jette un dé et on s'intéresse aux résultats obtenus: l'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. On jette une pièce de monnaie deux fois: $\Omega = \{FF,\ FP,\ PF,\ PP\}$.

3. Tirer deux lettres au hasard **succéssivement** (*l'un après l'autre*) d'un mot BAS: $\Omega = \{BA,\ AB,\ BS,\ SB,\ AS,\ SA\}$.

4. Tirer deux lettres au hasard **simultanément** (*en même temps*) d'un mot BAS: $\Omega = \{BA,\ BS,\ AS, \}$.
5. Observer la durée de vie d'une ampoule de 100 watts: $\Omega = [0; +\infty[$.

6. On jette deux dés: $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$.

7. On lance deux dés. Soit les événements:
   A: la somme des points est supérieure à 15 ($A = \emptyset$ (événement impossible))
   B: la somme des points est inférieure à 13 ($B = \Omega$ (événement certain))
   C: la somme des points est égale à 2 ($C = \{(1,1)\}$ (événement élémentaire).)
8. On lance une pièce et ensuite on lance un dé.
   a) Décrire l'ensemble fondamental Ω l'expérience aléatoire: $\Omega = \{P1, .., P6, F1, ..., F6\}$
   b) les événements suivants:
   A: obtenir Face et un nombre pair: $A = \{F1, F2, F5\}$
   B: obtenir un nombre strictement supérieur à 4 avec le dé: $A = \{P5, P6, F5, F6\}$

9. Une urne contient 3 boules: une rouge, une verte et une blanche. On choisit une boule de l'urne, on la remet dans l'urne puis on en choisit une deuxième. Soit
   A_1: on choisit aucune boule rouge,
   A_2: on choisit 2 boules d'une même couleur,
   A_3: on choisit au moins 1 boule rouge,
   A_4: on choisit 2 boules d'une couleur différente,
   A_5: on choisit 2 boules rouges,
   A_6: on choisit 1 boule rouge.

10. Trouver le cardinal des l'espace fondamental associé aux expériences aléatoires suivantes
    a) On lance une pièce de monnaie 9 fois: $|\Omega| = 2^9$.
    b) On lance un dé 3 fois:$|\Omega| = 6^3$
11. Trouver le cardinal des l'espace fondamental associé aux expériences aléatoires suivantes:
    a) On tire 2 cartes (*simultanément*) d'un jeu ordinaire de 52 cartes: $|\Omega| = C_{52}^2$.
    b) On tire 2 cartes (*succévement*) d'un jeu ordinaire de 52 cartes: $|\Omega| = A_{52}^2$.

Définition (*Partition de* Ω)

Une partition de Ω est une famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que:

1) Pour tout $i \neq j$: $A_i \cap A_j = \varnothing$. (Deux à deux incompatibles -disjoints-)
2) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Définition (*Probabilité sur* Ω)

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Une probabilité est une application

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

telle que:
1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2) Pour toute $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, deux à deux disjoints, on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ s'appelle *espace de probabilité*. Comme conséquences immédiates on a:

- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Probabilité uniforme

Supposons que le cardinal de Ω est fini. Si tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, qui est $\frac{1}{|\Omega|}$, on dit alors qu'ils sont équiprobables. On a alors pour tout événement $A \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}.$$

Cette probabilité $\mathbb{P}$ s'appelle *probabilité uniforme* sur Ω.

Remarque.

- On dit aussi que Ω est équiprobable.
- **Attention**: La formule précédente n'est pas vraie si Ω n'est pas équiprobable.

Exemple.

Expérience 1: Le jet de deux dés non truqués, $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ est un univers équiprobable avec

$$\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Expérience 2: On jet deux pièces de monnaie. Alors, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ est équiprobable. Soit A : "On obtient au moins une fois P "$= \{PP, PF, FP\}$. Donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}.$$

Expérience 3: Trois boules sont tirées simultanément au hasard d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 boules noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et les deux autres noires ?

Réponce:
Cas possibles : $C_{11}^3 = \frac{11!}{3! \times 7!} = 165$.
Cas favorables : $C_6^1 \times C_5^2 = 6 \times \frac{5 \times 4}{2}$.
Probabilité : $\frac{C_6^1 \times C_5^2}{C_{11}^3} = \frac{4}{13}$.
Expérience 4: Si on s'intéresse à la somme des deux dés, alors $\Omega = \{2, 3, ..., 12\}$ n'est pas équiprobable. Par exemple

$$\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{36} \text{ et } \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{2}{36}.$$

Expérience 5: Jet d'un dé truqué: le 6 apparaît 2 fois plus que les autres. Alors, Ω n'est pas équiprobable.
$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p$; $p_6 = 2p$, p tel que : $5p + 2p = 1$, $p = \frac{1}{7}$.
A : "le résultat est pair"; $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{4}{7}$.

Cas général.

On suppose que l'ensemble fondamental (univers) $\Omega = \{w_i\}_{i \in I}$ est fini ou dénombrable. On définit les probabilités de chaque résultats élémentaires, on a alors une suite $(p_1, ..., p_n \ldots)$. Alors, la probabilité d'un événement quelconque A est donné par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(\{w\}) = \sum_{w_i \in A} p_i.$$

Vérification:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{w \in A} \{w\}) = \sum_{w \in A} \mathbb{P}(\{w\}).$$

Théorème (*Théorème des probabilités totales*)

Soit $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ un système complet d'événements (i.e. $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ constituent une partition de Ω).
Alors

$$\forall A : \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A \cap B_i).$$