Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2020/2021

Cours 2: Probabilités conditionnelles et Théorème de Bayes

Probabilités conditionnelles

On lance deux dés et on considère les deux événements suivants:
A : le premier dé donne 6.
B : la somme des deux dés est égale à 11.
On vérifie facilement que la probabilité de

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{1}{18}$$

Maintenant, si on observe que l'événement A du premier dé est réalisé, alors cela va affecte forcément sur la probabilité de l'événement B. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(B_{/A}\right) &= \text{probabilité de } B \text{ sachant que le premier dé a donné le nombre 6} \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

on dit la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Un autre exemple: Si on dispose d'un dé non truqué dont les faces pairs sont coloriés en rouges. On jette ce dé:
- Calculer la probabilité d'obtenir 4.
- Si on observe que le dé a donné une face rouge, quelle est la probabilité d'obtenir 4.

Réponse: On pose
A : Obtenir un 4.
B : Obtenir une face rouge.
Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}\left(A_{/B}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ces deux exemples motivent la définition suivante.

Définition.

Etant donnés deux événements A et B, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on appelle probabilité de A sachant B, la probabilité notée $\mathbb{P}(B/A)$ définie par

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Evénements indépendants

Soient A et B deux événements. Ils sont indépendants si la réalisation de A n'affecte pas la réalisation de B, et inversement. C'est à dire si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Exemple.

1) On jette deux dés équilibrés. Soient les événements

A : la somme des dés vaut 7;

B : le premier dé affiche 4;

C : le second dé affiche 3.

Calculer $P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$.

2) Soit une famille de deux enfants. On pose:

A : "la famille a des enfants des 2 sexes",

B : "la famille a, au plus, une fille".

A et B sont-ils ind ependants ?

Réponse:

$\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$.

$A = \{FG, GF\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{FG, GF, GG\}$, $P(B) = \frac{3}{4}$. Alors,

$$A \cap B = \{FG, GF\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A)\,P(B) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

A et B ne sont pas indépendants

3) Même question avec 3 enfants.

$\Omega = \{FFF, FFG, FGG, FGF, GFF, GFG, GGF, GGG\}$.

$A = \{FFG, FGG, FGF, GFF, GFG, GGF\}$, $P(A) = \frac{6}{8}$

$B = \{FGG, GFG, GGF, GGG\}$, $P(B) = \frac{4}{8}$. Alors,

$$A \cap B = \{FGG, GFG, GGF\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} \text{ et } P(A)\,P(B) = \frac{6}{8}\frac{4}{8} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

A et B sont pas indépendants. Ceci est uniquement vrai pour $n = 3$.

Proposition.

Si A et B sont indépendants, alors

1) A et B^c sont des événements indépendants

2) A^c et B sont des événements indépendants

3) A^c et B^c sont des événements indépendants.

Vérification.

On remarque que $A = A \cap (B^c \cup B)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap (B^c \cup B)) = \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}\left(\underbrace{A \cap B^c \cap A \cap B}\right) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

Alors,
$$\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

Noter que:

- A est dit indépendant de B si la réalisation de l'événement A n'est affecté par aucune information concernant B, ni par l'absence d'information concernant B.
- L'événement certain Ω est indépendant de tout événement A.
- L'événement impossible Φ est également indépendant de tout autre événement.

Corollaire.

Supposons que $\mathbb{P}(B)\neq 0$. Alors, les properiétés suivantes sont équivalentes:

1) A et B sont indépendants.
2) $\mathbb{P}(A/B)=\mathbb{P}(A)$.

D'autre part si $\mathbb{P}(A)\neq 0$, on aussi 1) $\Leftrightarrow$ 2) où:

1) A et B sont indépendants.
2) $\mathbb{P}(B/A)=\mathbb{P}(B)$.

Définition. (*Cas général*)

n événements $A_1,\ldots,A_n$ sont dits indépendants si et seulement si, pour toute partie $I\subset\{1,...,n\}$ on a
$$\mathbb{P}(\cap_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i).$$

Par exmple: A,B et C sont indépendants si
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B\cap C)&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\\ \mathbb{P}(A\cap B)&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ \mathbb{P}(A\cap C)&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\\ \mathbb{P}(B\cap C)&=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

Définition.

Une famille infinie d'événements est indépendante si toute sous famille finie est indépendante.

Exemple.

On jette deux pièces de monnaies. On note
A : "la première pièce donne Pile",
B : "la seconde pièce donne Face"
C : "les deux pièces donnent le même résultat".
Les trois événements sont-ils indépendants ?

Réponse.

$\Omega=\{PP,PF,FP,FF\}$,
$A=\{PP,PF\}$ $P(A)=1/2$
$B=\{PF,FF\}$ $P(B)=1/2$
$C=\{PP,FF\}$ $P(C)=1/2$
$A\cap B=\{PF\}, P(A\cap B)=1/4=P(A)P(B)$
$A\cap C=\{PP\}, P(A\cap C)=1/4=P(A)P(C)$
$B\cap C=\{FF\}$, $P(B\cap C)=1/4=P(B)P(C)$
$A\cap B\cap C=\varnothing$, $P(A\cap B\cap C)=06=P(A)P(B)P(C)$.
Ainsi les événements A,B et C sont 2 à 2 indépendants mais pas indépendants.

Théorème de Bayes:

Cas pour $n = 2$: Soit A un événement de probabilité non nulle. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A/\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}.$$

Preuve.

On a la probabilité conditionnelle suivante:

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On a aussi: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \\
&= \mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A/\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right).
\end{aligned}$$

Cas général.

Soit A un événement de probabilité non nulle. Si les événements B_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une partition de Ω avec $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. On a pour tout $j = 1, ..., n$

$$\mathbb{P}(B_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

Preuve.

On a la probabilité conditionnelle suivante:

$$\mathbb{P}(B_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_j)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On a aussi pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$\mathbb{P}(A \cap B_j) = \mathbb{P}(A/B_j)\,\mathbb{P}(B_j).$$

D'autre part, le théorème de probabilités totales donne pour la partition $(B_i)_{i=1}^{n}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_i)\,\mathbb{P}(B_i).
\end{aligned}$$

Exemple.

On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. L'urne U_2 contient contient 4 boules rouges et 2 boules vertes. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1, sinon on choisit U_2. On effectue un tirage de l'urne choisie. Supposons qu'on a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité d'être de l'urne 1 ?