Matière : Méthode Numérique
Cours + TD
Crédits : 04 ; Coefficient : 02

Chapitre 01 : Résolution des équation non linéaires $f(x)=0$:

1 _ Introduction sur les erreurs de calcul :

il est impossible de connaître la valeur exacte d'une grandeur phisique. il est très important de connaître l'incertitude (erreur) de la mesure.

A _ les erreurs absolues et relatives :

* l'erreur absolue σx :

$\sigma x = |$Valeur exact X_E - Valeur mesuré $X_m|$
(avec unité)

* l'erreur relative :

est le quotient de l'erreur absolue par la valeur mesuré $= \frac{\sigma x}{X_M}$ (sans unité).

* l'incertitude absolue Δx :

est l'erreur maximale que l'on peut connettre en mesurant x. Elle a la même unité que x ; $|\sigma x| \leq \Delta x$.

* l'incertitude relative $i(x)$; $r(x)$:

$r(x) = \frac{\Delta x}{X_M}$ (sans unité)

* Formule générale de l'erreur :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$

Alors :
$$\begin{cases} \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i \\ i(f) = \frac{\Delta f}{|f|} \end{cases}$$

Exemple :

Energie cinétique : $E = \frac{1}{2} m v^2$
m = masse. $m = 9{,}5 \pm 1{,}8$ Kg
v = vitesse $v = 7{,}35 \pm 0{,}23$ m/s

On a : $\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 = 257 \text{ Kg } m^2/s^2}$

• incertitude

$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right| \cdot \Delta v$.
$= \left|\frac{1}{2} v^2\right| \cdot 1{,}8 + \left|\frac{1}{2} m \cdot 2v\right| \cdot 0{,}33$
$= 64{,}68$

$\boxed{\Delta E \simeq 65 \text{ Kg } m^2/s^2}$

• incertitude relative :

$i(E) = \frac{\Delta E}{E} = 0{,}25 = \boxed{25\%}$

B _ Représentation décimale d'un nombre approché :

Ex : $13{,}102 = 1\times10^1 + 3\times10^0 + 1\times10^{-1} + 0\times10^{-2} + 2\times10^{-3}$
les chiffres $(1;3;1;0;2)$ sont appelés chiffres significatifs

Ex : $0{,}0012 = 1\times10^{-3} + 2\times10^{-4}$ chiffs significatifs

C _ Chiffre significatif exact (c.s.e) :

On dit que les n premiers chiffres d'un nombre approché x^* sont exact si :

$\boxed{\Delta x \leq 0{,}5 \times 10^{m-n+1}}$

ou m est le 1ère exposant de 10 dans formule de Représentation décimale.

Exemple 1 : $X = 2{,}5 \pm 0{,}01$; $\Delta X = 0{,}01$.
On a : $2{,}5 = 2\times10^0 + 5\times10^{-1}$; $n=2$; $m=0$.
$0{,}5\times10^{m-n+1} = 0{,}05$; On a $\Delta x \leq 0{,}05$
$\Rightarrow$ donc les chiffres de x sont exacts.

Exemple 2 : $x = 223{,}864$ et $x^* = 223{,}887$
On a : $223{,}887 = 2\times10^2 + 2\times10^1 + \dots$; donc $n = 6$; $m = 2$;
$0{,}5\times10^{m-n+1} = 0{,}0005$ et $\Delta x = 0{,}023$.
$0{,}0005 \not> 0{,}023$ donc les chiffres de x^* ne sont pas exacts.

On a : $\Delta x = 0{,}023 = 0{,}23\times10^{-1} \leq 0{,}5\times10^{-1}$
donc $m - n + 1 = -1 \Rightarrow n = 4$; et les quatres chiffres significatifs 2 ; 2 ; 3 et 8 sont exacts.

D _ Arrondissement d'un nombre approché :

_ Règles d'arrondissement :

L'arrondissement est un processus qui consiste à tronquer les nombres pour n'en garder que le nombre de chiffres significatifs exacts.

1_ Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif est > 5, on augmente le $n^{ième}$ chiffre de 1.

2_ Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatifs est < 5, les chiffres retenus restent inchangés.

3_ Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatifs est 5, alors deux cas sont possibles :

i _ Tous les chiffres rejetés, situés après $(n+1)^{ième}$ c.s, sont des zéros : On applique la règle du chiffre pair i.e : le $n^{ième}$ chiffre reste inchangé s'il est paire. On lui ajoute 1 s'il est impaire.

ii _ Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ième}$ c.s, il existe au moins un qui soit non nul : On ajoute 1 au $n^{ième}$ chiffre.

Solution d'exercices de TD 01

Remarque :

1 - On n'arrondi que le résultat final, jamais les résultats intermédiaires.

2 - Un nombre correctement arrondi ne possède que des chiffres significatifs exacts.

Exemples :

1. Arrondir $x = 0,254$ à (2.c.s) ; $x^* = 0,25$.
2. " $x = 1,534500$ à (4.c.s) ; $x^* = 1,534$.
3. " $x = 0,4368$ à (3.c.s) ; $x^* = 0,437$.
4. " $x = 1,5347500$ à (5.c.s) ; $x^* = 1,5348$.
5. " $x = 23,605042a$ à (4.c.s) ; $x^* = 23,61$

Remarque : L'erreur d'arrondi notée Δarr, elle vérifie l'estimation suivante :

$$\Delta_{arr} \leq 0,5 \times 10^{m-n+1}$$

et $x = x^*_{arr} \pm [\Delta_{arr} + \Delta_x]$

En général, on prend $\Delta_{arr} \simeq \Delta x$, Par suite :

$$\boxed{x = x^*_{arr} \pm 2\Delta x}$$

où x^*_{arr} est le nombre approché arrondi

2. Δx est l'erreur absolu d'arrondi.

Exemple : Soit $x = 0,1256$, donné avec une erreur de $0,5\%$. ($r(x) = 0,005$)

1 - Donner l'erreur absolue de x.

2 - Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts de ce nombre.

3 - Arrondir le résultat au dernier c.s.e.

La solution :

1 - On a : $\Delta x = r(x) \cdot |x| = \boxed{0,000628}$

2 - On a : $0,000628 = 0,0628 \times 10^{-2} < 0,5 \times 10^{-2}$

et on a : $\Delta x < 0,5 \times 10^{m-n+1}$ donc $m - n + 1 = -2$

$-1 - n + 1 = -2 \Rightarrow \boxed{n = 2}$ c.s.e.

3 - $x^*_{arr} = 0,13$; Par le résultat final s'écrit

$$x = x^*_{arr} \pm 2\Delta x = \boxed{0,13 \pm 0,1256 \times 10^{-3}}$$

Exercice 01 :

$d_1 = 19,5 \pm 0,1\,mm$; $\Delta d_1 = 0,1\,mm$

$d_2 = 26,7 \pm 0,1\,mm$; $\Delta d_2 = 0,1\,mm$.

* l'épaisseur :

$$e = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{26,7 - 19,5}{2} = \boxed{3,6\,mm}$$

* incertitude absolue :

$$\Delta e = \left|\frac{\partial e}{\partial d_2}\right| \cdot \Delta d_2 + \left|\frac{\partial e}{\partial d_1}\right| \cdot \Delta d_1$$

$$= \frac{1}{2}\Delta d_2 + \frac{1}{2}\Delta d_2$$

$\boxed{\Delta e = 0,1\,mm}$ donc : $\boxed{e = 3,6 \pm 0,1\,mm}$

* la précision (incertitude relative) :

$$i(e) = \frac{\Delta(e)}{e} = \frac{0,1}{3,6} = 0,027777 \simeq 0,03 = \boxed{3\%}$$

Exercice 02 :

$x = 2 \pm 10^{-6}$; $\Delta x = 10^{-6}$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x$$

On a : $f'(x) = 20x\, e^{10x^2} \cos x - e^{10x^2} \cdot \sin x$

donc :

$$\Delta f = |f'(2)| \cdot \Delta x = \boxed{4,1322 \cdot 10^{12}}$$

Exercice 03 :

1/ Vérification :

On a : les n chiff sont exactes $\Leftrightarrow \Delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$

$x = 2,5 \pm 0,01$; $\Delta x = 0,01$

On a : $2,5 = 2 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$; $n = 2$; $m = 0$.

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{0-2+1} = 0,05 \geq 0,01 = \Delta x$$

donc : Tous les chiffres de x sont exacts.

2/ $S = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$

$$S = (2,5)^2 + (4,2)^2 + (3,2)^2 + (5,1)^2 = 43,94$$

$$\Delta S = \left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial S}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial S}{\partial z}\right| \cdot \Delta z + \left|\frac{\partial S}{\partial t}\right| \cdot \Delta t$$

$$= 2x \cdot \Delta x + 2y\Delta y + 2z \cdot \Delta z + 2t \cdot \Delta t$$

$$\boxed{\Delta S = 0,392}$$