

I / Généralités

Antennes

1/ Définition: Les antennes sont des dispositifs qui ont pour fonction de transformer les ondes guidées en des ondes qui se propagent dans l'espace libre et réciproquement de capter des ondes de l'espace libre et réciproquement pour les conduire vers les circuits. Ce sont des adaptateurs entre l'espace et les circuits.

2/ Paramètres caractéristiques d'une antenne

Pour décrire les performances d'une antenne, on doit donner les définitions des différents paramètres.

- Diagramme de rayonnement

Le diagramme de rayonnement d'une antenne est une fonction mathématique ou une représentation graphique des propriétés de rayonnement de l'antenne, en fonction des coordonnées spatiales.

- Diagramme isotropique, directionnel et omnidirectionnel

L'antenne isotrope: c'est une antenne fictive qui rayonne dans toutes les directions de la même façon.

Antenne directive: c'est une antenne qui privilège le rayonnement (ou la réception) des ondes EM dans des directions bien définies par rapport à d'autres.

Un exemple d'une antenne qui a un rayonnement directionnel est illustré dans la Fig 1. On voit que ce diagramme est non directionnel dans le plan azimutal $[f(\phi), \theta = \pi/2]$ et directionnel dans le plan élévation $[g(\theta), \phi = \pi/2]$.

Ce type de diagramme s'appelle Omnidirectionnel et il est défini comme un diagramme qui a un diagramme de rayonnement non directionnel dans un plan donné et ~~non~~ directionnel dans un plan orthogonal.

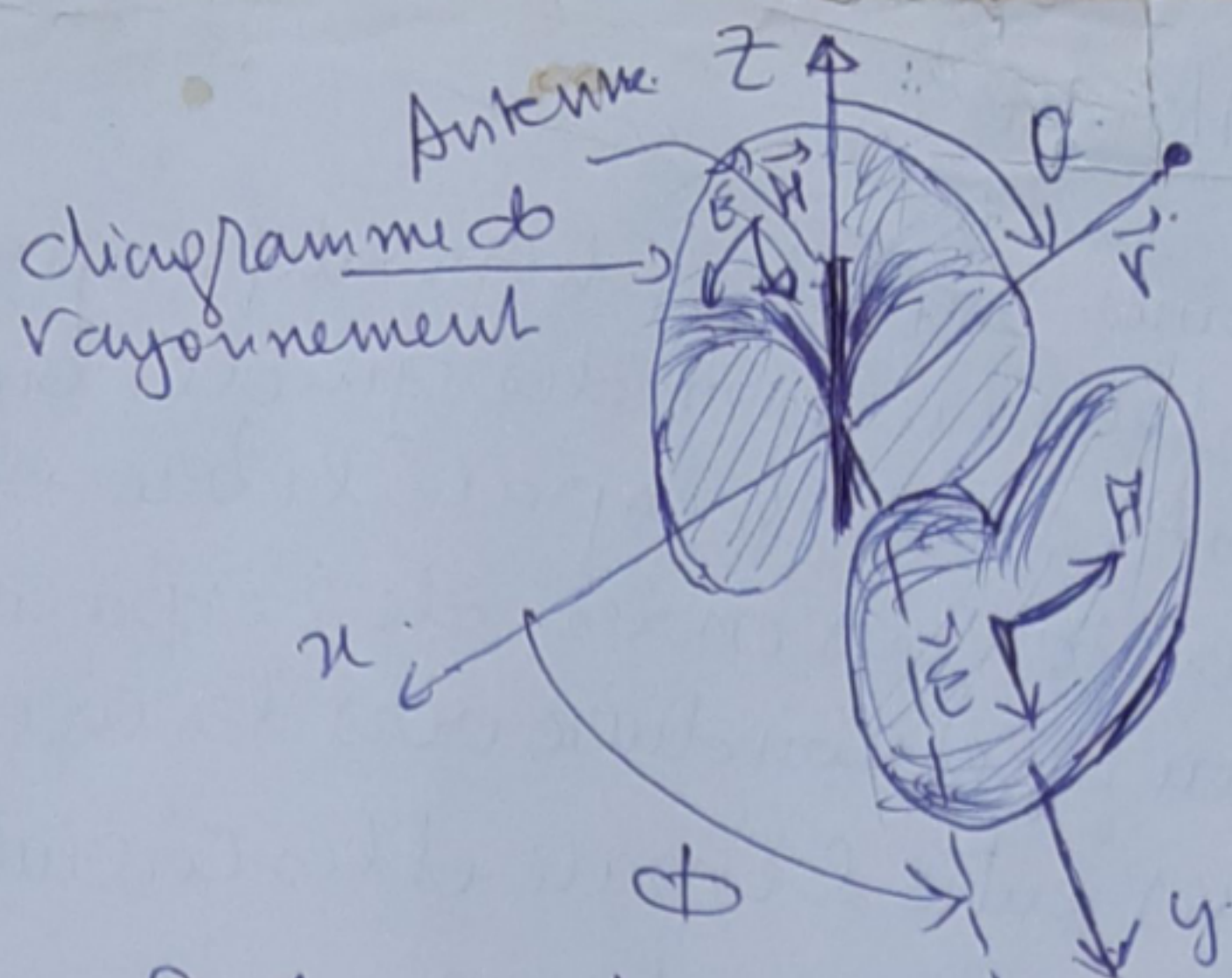


Fig 1. Diagramme Omnidirectionnel d'antenne.
Lobes d'un diagramme de rayonnement

Les différentes parties d'un diagramme de Rayonnement sont connues sous le nom de lobes, Ces derniers sont classés en lobe principal et lobe secondaires.

Lobe principal: ~~est définie comme~~ est un lobe qui contient la direction de rayonnement maximale.

Lobes secondaires: sont toute autre lobe autre que le lobe principal. (voir Fig-2).

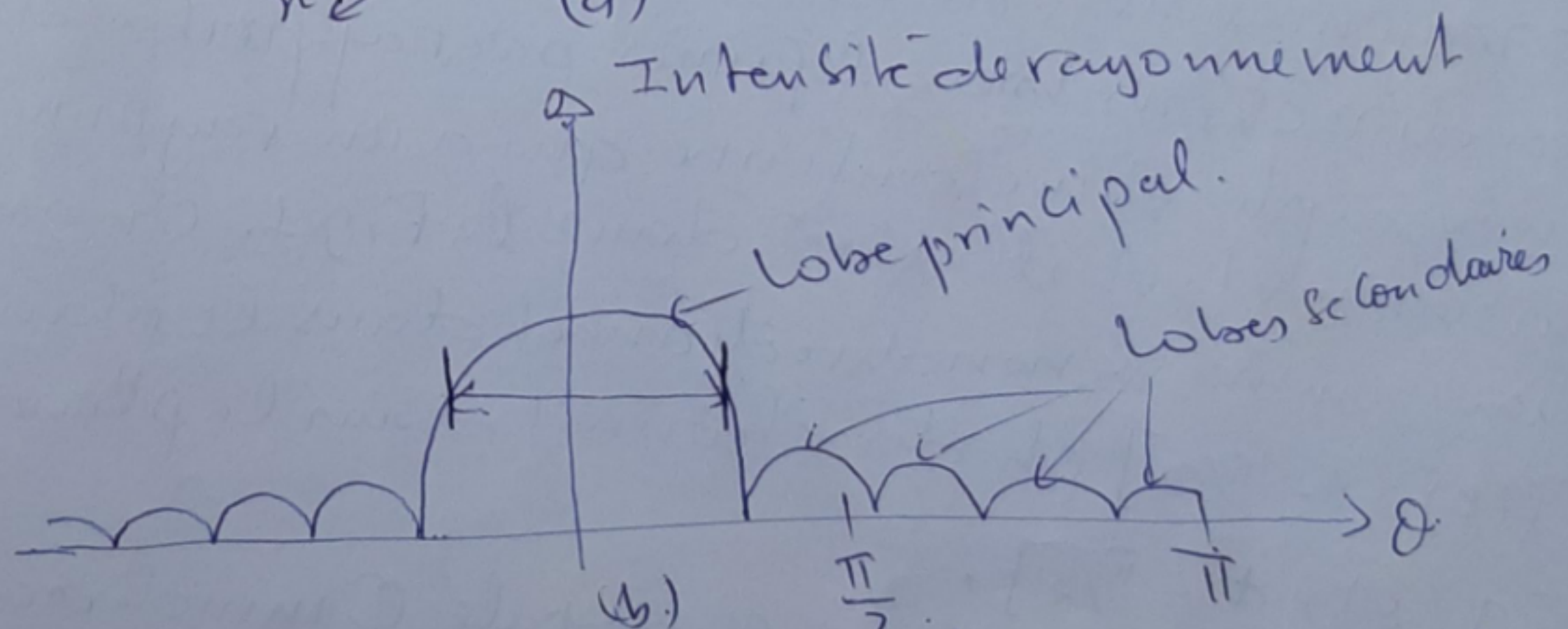
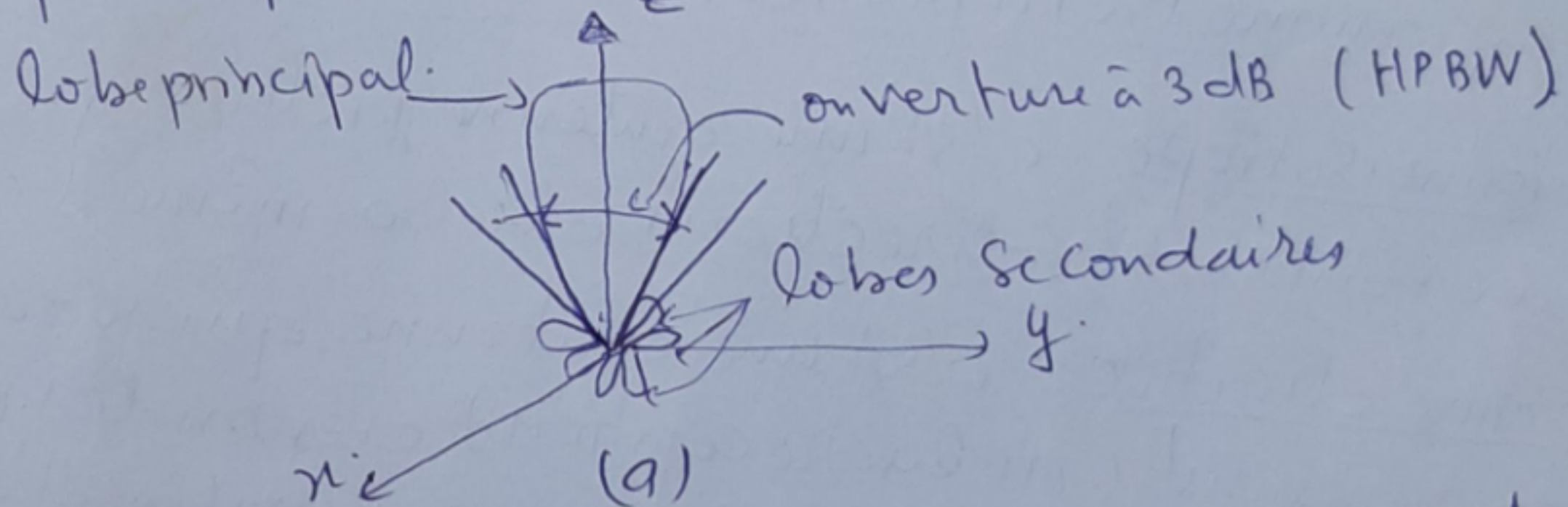


Fig.2: (a) Lobes et ouverture d'un diagramme de rayonnement. (b) Diagramme linéique avec lobes et ouverture correspondants.

Intensité de rayonnement

L'intensité de rayonnement dans une direction donnée est définie comme la puissance rayonnée par une antenne par unité d'angle solide.

l'angle solide:

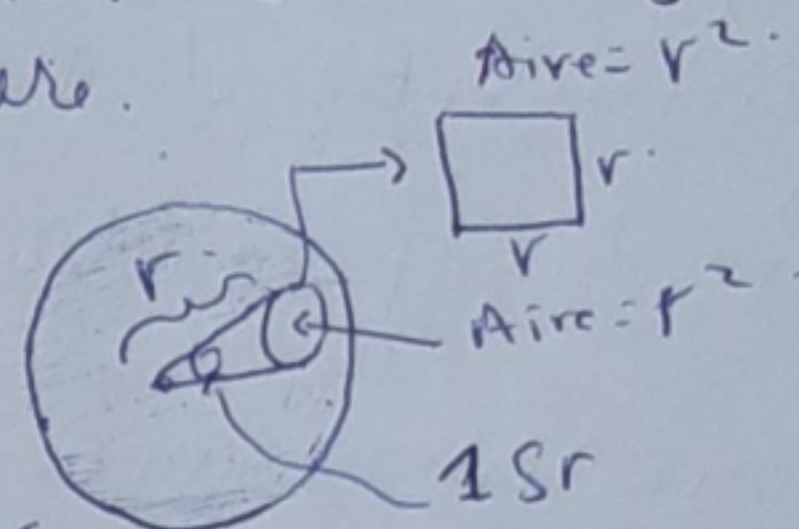
La mesure de l'angle solide est en stéradian. Un stéradian est défini comme l'angle solide sous lequel un observateur en un point O (centre d'une sphère de rayon r) une surface r^2 . Comme la surface d'une sphère est $4\pi r^2$ donc il y a 4π sr pour voir toute la surface d'une sphère.

un élément de surface ds appartenant à la surface de la sphère est donné par:

$$ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

donc l'élément de l'angle solide est donné par:

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$



La puissance moyenne rayonnée par une antenne (puissance rayonnée) est donnée par:

$$P_{\text{ray}} = P_{\text{moy}} = \oint_S \vec{W}_{\text{ray}} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{W}_{\text{moy}} \cdot d\vec{s}$$

où $\vec{W}_{\text{ray}} = \vec{W}_{\text{moy}}$ est la densité de puissance moyenne (densité de puissance) rayonnée (vecteur de Poynting), donnée par:

$$\vec{W}_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \text{ - donc on a:}$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re} [\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \cdot d\vec{s}$$

$$U(\theta, \phi) = \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{\vec{W}_{\text{rad}} \cdot d\vec{s}}{d\Omega} \Rightarrow$$

$$U = r^2 W_{\text{rad}}$$

U : intensité de rayonnement (W /unité d'angle solide)

W_{rad} : densité de puissance rayonnée (W/m^2).

L'intensité de rayonnement est reliée aussi au champ électrique lointain par:

$$U(\theta, \varphi) = \frac{r^2}{2\eta} |\vec{E}(r, \theta, \varphi)|^2 \approx \frac{r^2}{2\eta} [|\vec{E}_\theta(r, \theta, \varphi)|^2 + |\vec{E}_\varphi(r, \theta, \varphi)|^2]$$

$$\approx \frac{1}{2\eta} [|\vec{E}_\theta^0(\theta, \varphi)|^2 + |\vec{E}_\varphi^0(\theta, \varphi)|^2]$$

où : $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ = champ électrique lointain = $\vec{E}^0(\theta, \varphi) \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}$

E_θ, E_φ = Composantes du champ lointain.

η : impédance caractéristique du milieu

La puissance totale rayonnée se obtient en intégrant l'intensité de rayonnement à travers l'angle solide :

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U \cdot d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Pour une source isotropique, $U = U_0$ (indépendant de θ et φ) $\Rightarrow$

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U_0 \cdot d\Omega = U_0 \oint_{\Omega} d\Omega = U_0 4\pi \Rightarrow$$

l'intensité de rayonnement pour une antenne isotrope :

$$U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

Directivité :

C'est le quotient entre l'intensité de rayonnement suivant une direction donnée et la valeur moyenne des intensités de rayonnement = la puissance totale rayonnée divisée par 4π .

Autrement dit, la directivité d'une antenne non isotrope est le quotient de son intensité de rayonnement suivant une direction donnée et celle d'une antenne isotrope.

D'où :
$$D(\theta, \varphi) = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi \cdot U}{P_{ray}} \quad (\text{sans unité})$$

ou encore :
$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi \cdot U(\theta, \varphi)}{\oint_{\Omega} U(\theta, \varphi) \cdot d\Omega}$$

Pour une antenne isotrope :

$$U(\theta, \varphi) = U_0 \Rightarrow$$

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{U_0}{U_0} = 1$$

Gain

Le gain d'une antenne est le quotient de l'intensité de rayonnement dans une direction donnée et l'intensité de rayonnement qu'on aurait obtenue si la puissance à l'entrée de l'antenne est rayonnée de façon isotrope.

$$\text{gain} = \frac{\text{Intensité de rayonnement suivant une direction donnée}}{\frac{1}{4\pi} \times \text{Puissance totale à l'entrée de l'antenne}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{gain} = 4\pi \cdot \frac{U(\theta, \varphi)}{P_{in}}} \quad (\text{Sans dimension})$$

on définit l'efficacité de rayonnement e tel que:

$$P_{rad} = e P_{in} \quad \text{on a alors:}$$

$$G(\theta, \varphi) = e \cdot \left[4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{P_{rad}} \right] \Rightarrow \boxed{G(\theta, \varphi) = e D(\theta, \varphi)}$$

Remarque: Pour une antenne. Sans pertes d'énergie le gain et la directivité sont confondus ($e=1$).

Ouverture à 3dB (Half-Power Beamwidth = HPBW).

Dans un plan qui contient le maximum du faisceau rayonnant, l'angle entre les deux directions dans lequel l'intensité de rayonnement est la moitié du maximum de l'intensité de rayonnement du faisceau. est appelé ouverture à 3dB.

II / Potentiels retardés - "Potentiel de Lorentz"

Introduction

Dans les problèmes de rayonnement d'antennes, l'analyse du problème consiste à trouver les champs, électrique et magnétique, créés par une distribution de courant $\vec{J}$. Le point de départ pour résoudre les problèmes de rayonnement électromagnétique est toujours les équations de Maxwell. Dans le cas où la distribution $\vec{J}$ est harmonique la notion du potentiel scalaire (5) et vectoriel est utilisée pour résoudre

En régime harmonique les équations de Maxwell deviennent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J} \quad (4)$$

On prend l'équation:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5)$$

Cela implique que $\vec{H}$ est le rotationnel de quelque chose. (Car $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$), donc.

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (6)$$

$\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur magnétique.

En substituant (6) dans (3) on aura:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \mu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$\text{Soit } \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + j\omega \mu \vec{A}) = 0 \quad (7)$$

L'expression entre parenthèse dans (7) est un champ électrique, du moment qu'il est rotationnel. Si c'est zéro, c'est un champ conservatif qui se comporte comme un champ électrique statique. Le potentiel scalaire électrique ϕ est ainsi défini par:

$$\vec{E} + j\omega \mu \vec{A} = -\vec{\nabla} \phi \quad (8)$$

Cette définition satisfait parfaitement l'équation (7)

Car $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi = 0$. On tire donc $\vec{E}$.

$$\vec{E} = -j\omega \mu \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \quad (9)$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont maintenant exprimés en fonction des fonctions potentielles $\vec{A}$ et ϕ . Donc, si on connaît $\vec{A}$ et ϕ on peut alors calculer $\vec{E}$ et $\vec{H}$.
Procédons à présent à la détermination de $\vec{A}$.

Remplaçons (6) dans (4) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = j\omega\epsilon \vec{E} + \vec{J} \quad (10)$$

En utilisant l'identité vectorielle :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (11)$$

et portant (9) dans (10) on aura :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = j\omega\epsilon (-j\omega\mu \vec{A} - \vec{\nabla} \phi) + \vec{J} \quad (12)$$

Soit :

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\epsilon \vec{A} - \vec{\nabla} (j\omega\epsilon \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\vec{J} \quad (13)$$

Nous pouvons utiliser notre liberté de choix de la divergence de $\vec{A}$ pour arranger les équations donnant $\vec{A}$ et ϕ et arriver à des équations en $\vec{A}$ et ϕ séparées, mais qui ont la même forme. Nous pouvons le faire en prenant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega\epsilon \phi \quad (14)$$

Le choix de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ s'appelle "choisir une jauge".

L'équation (14) s'appelle "jauge de Lorentz".

Alors (13) devient :

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\epsilon \vec{A} = -\vec{J} \quad (15)$$

C'est l'équation d'onde vectorielle pour $\vec{A}$. C'est une équation différentielle qui peut être résolue pour $\vec{A}$ après avoir spécifié la distribution de courant $\vec{J}$. Ensuite les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont calculés à partir de l'équation (9) :

$$\vec{E} = -j\omega\mu \vec{A} + \frac{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{j\omega\epsilon} \quad (16)$$

On note que seulement la connaissance de $\vec{A}$ est nécessaire pour le calcul des champs.

Cependant, la résolution de l'autre équation d'onde scalaire pour ϕ mène à des calculs plus complexes.

$$\nabla^2 \phi + \omega^2 \mu \epsilon \phi = -\rho/\epsilon \quad (17)$$

(17) se obtient en remplaçant (9) dans (1) :

$$\text{En effet, } \vec{\nabla} \cdot (-j\omega \mu \vec{A} - \vec{\nabla} \phi) = \rho/\epsilon$$

$$\text{or: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega \epsilon \phi \quad (\text{équation de Lorenz}).$$

$$\text{Donc, } \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu \epsilon \phi = -\rho/\epsilon$$

Entamons maintenant la résolution de l'équation (15)

Soit $\vec{A}$ donné par :

$$\vec{A} = \hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z \quad (18)$$

$$\text{d'où: } \nabla^2 \vec{A} = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z \quad (19)$$

Substituons (19) dans (15), on aura alors :

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -J_x$$

$$\nabla^2 A_y + \beta^2 A_y = -J_y \quad (20)$$

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -J_z$$

où $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. (β : est le vecteur d'onde).

Les équations (20) sont identiques dans leur forme. Donc, il suffit de résoudre une pour trouver la solution des deux autres équations.

on va d'abord essayer de trouver la solution pour une source ponctuelle de courant, c'est la réponse impulsionnelle unitaire. Ensuite la solution générale est la somme des réponses impulsionnelles des sources ponctuelles pondérées par la distribution de courant $\vec{J}$.

L'équation différentielle pour une source ponctuelle unitaire est :

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = -\delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (21)$$

où ψ est la réponse à une source ponctuelle située à l'origine, et δ la fonction de Dirac. ~~car~~ caractérisée par :

$$g(x-x_0) = 0 \text{ pour } x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-x_0) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(x-x_0) \cdot dx = g(x_0).$$

Si le courant se dans la direction $-z$, par exemple, alors $\psi = A_z$.

Pour tout point de l'espace, excepté l'origine, on a :

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = 0 \quad (22)$$

Cette équation se appelée équation d'onde homogène ou équation de Helmholtz.

A cause de la symétrie sphérique de la source ponctuelle, le potentiel ψ a aussi une symétrie ~~que~~ sphérique.

Alors, il vaut mieux exprimer le Laplacien en coordonnées sphériques pour profiter de la symétrie sphérique :

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} \quad (23)$$

le Laplacien se réduit donc à :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (24)$$

Si on fait le changement de variable suivant :

$\phi = r\psi$, et remplaçons (24) dans (22) on aura alors :

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \beta^2 \phi = 0 \quad (25)$$

Les solutions de l'équation (25) sont très connues :

$$\phi = c_1 e^{-j\beta r} + c_2 e^{+j\beta r} \quad (26)$$

$$\text{Soit } \psi = \frac{c_1 e^{-j\beta r}}{r} + c_2 \frac{e^{+j\beta r}}{r} \quad (27)$$

La solution se composée de deux ondes, une onde qui se propage dans une direction qui converge vers la source, elle ne correspond pas au rayonnement de la source, donc cette solution se rejetée, et une deuxième onde qui se propage selon une direction qui diverge à partir de la source. Cette solution correspond (9) à la réalité physique.

Finalement la solution est:

$$\psi(r) = C \frac{e^{-jBr}}{r} \quad (28)$$

En évaluant la constante d'intégration C (EX-T15):

$$C = \frac{1}{4\pi} \quad (29)$$

Soit: $\psi(r) = \frac{e^{-jBr}}{4\pi r} \quad (30)$

Si la source est située dans un point arbitraire, alors on doit calculer la distance R entre la source et le point d'observation P (voir Fig. 3).

$$\psi = \frac{e^{-jBR}}{4\pi R} \quad (31)$$

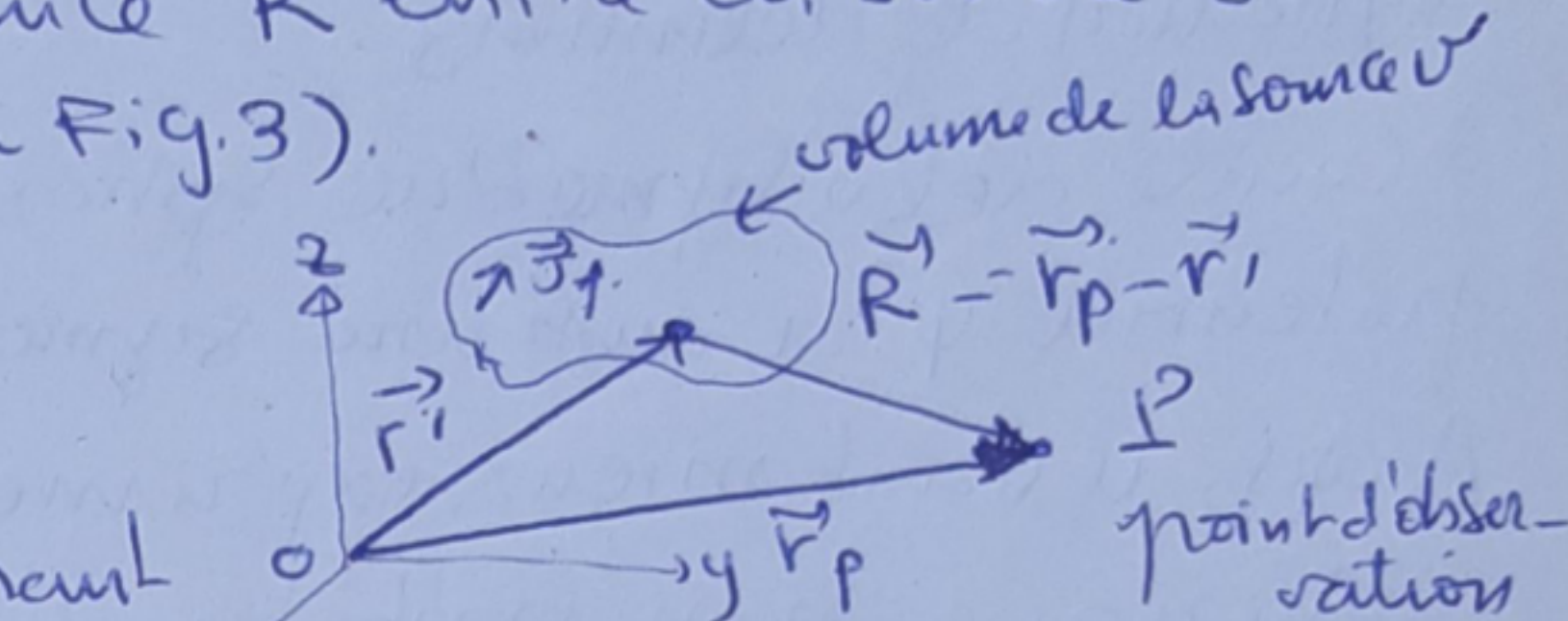


Fig. 2. Vecteurs utilisés pour résoudre les problèmes de rayonnement.

Si on considère la source de courant comme la somme de sources ponctuelles pondérées par la distribution J_z , la réponse.

A_z est donc la somme (l'intégrale) des réponses aux sources ponctuelles:

$$A_z = \iiint_{V'} J_z \cdot \frac{e^{-jBR}}{4\pi R} dV' \quad (32)$$

ici $J_z = J_z(x', y', z')$
(tout ce qui est primé correspond au volume de la source)

des équations similaires sont obtenues pour les composantes x et y du potentiel.

La solution totale est donc:

$$\vec{A} = \iiint_{V'} \vec{J} \cdot \frac{e^{-jBR}}{4\pi R} dV' \quad (33)$$

C'est la solution de l'équation de l'équation d'onde vectorielle (15). Le champ $\vec{H}$ est maintenant calculé par

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (34) \text{ et } \vec{E} \text{ par les relations:}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{J}) \quad (35) \quad \text{si on est dans la Région.}$$

de la source, on par $\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \quad (36)$
de la source. (ie si $\vec{J} = 0$ au pt P) (10)

III / Rayonnement du doublet électrique

Définition

Un doublet électrique est un conducteur de longueur l beaucoup plus petit que la longueur d'onde λ correspondant au courant I qui le parcourt. ($l \ll \lambda$)

Considérons un élément de courant infinitésimal de longueur Δz le long de l'axe $-z$ centré à l'origine. Cet élément a une amplitude I constante (car $\lambda \gg \Delta z$).

Le courant $\vec{J}$ peut s'écrire en tout point :

$$i = I \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \delta(z'). \quad (37)$$

$$\vec{J} = I \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \hat{z} \quad (38)$$

$$\vec{A} = \iiint_{V'} I \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot \hat{z} \cdot \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dV' \quad (39)$$

$$\vec{A} = \hat{z} I \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') \cdot dx' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y') \cdot dy' \cdot \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \quad (40)$$

$$\vec{A} = \hat{z} I \cdot \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz' \quad (41)$$

$\Delta z \ll \lambda$ et $\Delta z \ll R$ (Voir Fig 4). Alors $R \approx r \Rightarrow$

$$\vec{A} = \hat{z} I \cdot \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} dz' \quad (42) \quad \left| \begin{array}{l} r \text{ ne dépend pas de } z' \\ \text{or } R \text{ dépend de } z' \end{array} \right.$$

$$\vec{A} = \frac{I e^{-j\beta r}}{4\pi r} \Delta z \cdot \hat{z} \quad (43)$$

Cette relation est exactement vraie pour élément de courant infinitésimal et approximativement vraie pour un élément petit et uniforme de courant ($\Delta z \ll \lambda$ et $\Delta z \ll R$).

Le vecteur potentiel A_z pour un élément infinitésimal de courant a été calculé précédemment tel que :

$$I \cdot \Delta z = 1.$$

En général, on peut systématiquement remplacer R par r dans le dénominateur et l'exponentielle de l'équation (42). mais pas dans l'exponentielle. Cependant dans le cas d'un élément très petit de courant, on peut utiliser r au lieu de R , à la fois dans le dénominateur et l'exponentielle de l'équation (42).

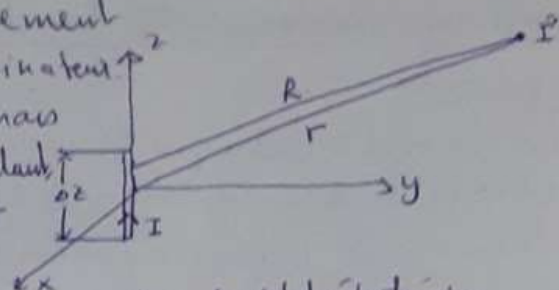


Fig. 3. Le doublet électrique. Le courant I est uniforme, $a \ll \lambda$ et $R \approx r$

* Calcul de $\vec{H}$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (A_z \hat{z}). \quad (44)$$

Si on applique l'identité vectorielle (voir chapitre 0).

$$\vec{\nabla} \wedge (A_z \hat{z}) = (\vec{\nabla} A_z) \wedge \hat{z} + A_z (\vec{\nabla} \wedge \hat{z}). \quad (45)$$

avec $\vec{\nabla} \wedge \hat{z} = 0$ (46) (Le rotationnel d'un vecteur constant = 0)

$$\text{alors : } \vec{H} = (\vec{\nabla} A_z) \wedge \hat{z} \quad (47)$$

Remplaçons (43) dans (47) :

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \left(\frac{I A_z}{4\pi r} e^{-jBr} \right) \wedge \hat{z}. \quad (49)$$

Le gradient dans les coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{\nabla} g = \hat{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} \quad (50)$$

(50) se réduit pour le cas utilisé à :

$$\vec{\nabla} g = \hat{r} \frac{\partial g}{\partial r} \quad (51)$$

$$\vec{H} = \frac{I A_z}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{e^{-jBr}}{r} \right) \wedge \hat{z} \quad (52)$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{e^{-jBr}}{r} \right) = \hat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jBr}}{r} \right) \quad (53)$$

$$\text{Soit } \vec{H} = \frac{I A_z}{4\pi} \left[-\frac{jB e^{-jBr}}{r} - \frac{e^{-jBr}}{r^2} \right] \cdot \hat{r} \wedge \hat{z} \quad (54)$$

$$\text{on a : } \hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \quad (55)$$

$$\hat{r} \wedge \hat{z} = \hat{r} \wedge (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) = \cos \theta \underbrace{\hat{r} \wedge \hat{r}}_{=0} - \sin \theta \underbrace{\hat{r} \wedge \hat{\theta}}_{=\hat{\phi}}$$

$$\hat{r} \wedge \hat{z} = -\hat{\phi} \sin \theta \quad (55)$$

Finalement le champ magnétique $\vec{H}$ est donné par:

$$\vec{H} = \frac{I a Z}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \cdot \sin\theta \cdot \hat{\phi} \quad (56)$$

+ calcul de $\vec{E}$

Pour calculer $\vec{E}$, on utilise la relation:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \wedge \vec{H} \quad (57)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \wedge \frac{I a Z}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \cdot \sin\theta \cdot \hat{\phi} \quad (58)$$

$$\vec{E} = \frac{I a Z}{j 4\pi \omega \epsilon} \cdot \nabla \wedge \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} \cdot \sin\theta \cdot \hat{\phi} \quad (59)$$

on doit maintenant donner le rotationnel dans les Coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{G} = & \hat{r} \cdot \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (G_\phi \sin\theta) - \frac{\partial G_\theta}{\partial\phi} \right] + \hat{\theta} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial G_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) \right] \\ & + \hat{\phi} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial\theta} \right] \quad (60) \end{aligned}$$

Pour notre cas on a une seule composante de G (G_ϕ) $\Rightarrow$

$$\nabla \wedge \vec{G} = \hat{r} \cdot \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} (G_\phi \sin\theta) + \hat{\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) \quad (61)$$

$$\text{on a: } G_\phi = \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (G_\phi \sin\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} \cdot \sin^2\theta \right] = \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} \cdot 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(j\beta + \frac{1}{r} \right) e^{-j\beta r} \cdot \sin\theta \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[j\beta \sin\theta e^{-j\beta r} + \sin\theta \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) = \beta^2 \sin\theta \cdot e^{-j\beta r} - \sin\theta \frac{(1+j\beta r)}{r^2} e^{-j\beta r}$$

$$\nabla \wedge \vec{G} = \hat{r} \cdot \frac{1}{r \sin\theta} \cdot 2 \sin\theta \cos\theta \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} + \hat{\theta} \cdot \frac{1}{r} \left[\beta^2 \sin\theta e^{-j\beta r} - \sin\theta \frac{(1+j\beta r)}{r^2} e^{-j\beta r} \right]$$

$$\nabla \wedge \vec{G} = \left[\hat{r} \cdot \frac{2 \cos\theta}{r^2} \left(j\beta + \frac{1}{r} \right) + \hat{\theta} \left(\frac{\beta^2 \sin\theta}{r} - \frac{\sin\theta (1+j\beta r)}{r^2} \right) \right] e^{-j\beta r}$$

$$\text{on a: } \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{I_0 Z}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \frac{1}{r^3} \right] \cos\theta e^{-j\theta r} + \hat{\theta} \frac{I_0 Z}{4\pi} \left[\frac{j\theta^2}{r} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r^3} \right] \sin\theta e^{-j\theta r}$$

Finalelement:

$$\vec{E} = \frac{I_0 Z}{4\pi} \left[\frac{j\omega\mu}{r} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] e^{-j\theta r} \cdot \sin\theta \cdot \hat{\theta} \quad (62)$$

$$+ \frac{I_0 Z}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \frac{1}{r^3} \right] e^{-j\theta r} \cdot \cos\theta \cdot \hat{r}$$

Donc $\vec{H}$ et $\vec{E}$ sont donnés par:

$$\vec{H} = \frac{I_0 Z}{4\pi} j\theta \left(1 + \frac{1}{j\theta r} \right) \cdot \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin\theta \cdot \hat{\phi} \quad (63)$$

$$\vec{E} = \frac{I_0 Z}{4\pi} j\omega\mu \left[1 + \frac{1}{j\theta r} + \frac{1}{(j\theta r)^2} \right] \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin\theta \cdot \hat{\theta}$$

$$+ \frac{I_0 Z}{2\pi} j\omega\mu \left[\frac{1}{j\theta r} + \frac{1}{(j\theta r)^2} \right] \frac{e^{-j\theta r}}{r} \cos\theta \cdot \hat{r} \quad (64)$$

*Champs rayonnés lointains

Si θr est très grande (i.e. $\theta r \gg 1$) ce qui est le cas (car $r \gg \lambda$ et $\theta = \pi/\lambda$). Donc tous les termes qui ont une puissance inverse de $(j\theta r)$ sont $\ll 1$. Donc (63) et (64) se réduisent à:

$$\vec{E} = \frac{I_0 Z}{4\pi} j\omega\mu \cdot \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin\theta \cdot \hat{\theta} \quad (65)$$

$$\vec{H} = \frac{I_0 Z}{4\pi} j\theta \cdot \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin\theta \cdot \hat{\phi} \quad (66)$$

Ce sont les champs d'un doublet électrique à grandes distances.
(dipôle électrique)

$$\text{on a: } \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (67)$$

η est l'impédance caractéristique du milieu.
(Pour l'espace libre $\eta_0 = 376,7 \text{ ohms} \approx 120\pi \text{ ohms}$)
C'est une propriété des ondes planes.

Puissance Rayonnée

$$P_{\text{ray}} = \frac{1}{2} \oint \vec{E} \wedge \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \quad (68)$$

En utilisant les expressions $\vec{E}$ et $\vec{H}$ calculés précédemment on va essayer de calculer la puissance rayonnée complexe à travers une sphère de rayon r qui entoure le doublet électrique.

$$\begin{aligned} P_{\text{ray}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{I \Delta z}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi j \omega \mu \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin\theta \hat{\theta} \wedge (-j\beta) \frac{e^{+j\theta r}}{r} \sin\theta \hat{\phi} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{I \Delta z}{4\pi} \right)^2 \omega \mu \beta \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \cdot \hat{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{I \Delta z}{4\pi} \right)^2 \omega \mu \beta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{I \Delta z}{4\pi} \right)^2 \omega \mu \beta 2\pi \cdot \frac{4}{3} \quad \left(\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P_{\text{ray}} = \frac{\omega \mu \beta}{12\pi} (I \Delta z)^2 \quad (69)$$

on peut réécrire (69) comme suit (dans le cas où le milieu est l'espace libre).

$$P_{\text{ray}} = \frac{10 \cdot \omega \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot (I \Delta z)^2}{120\pi} = 10 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \mu \cdot \left(\frac{2\pi}{1} \right) \left(\frac{2\pi}{1} \right) \cdot C = 10 \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \left(\frac{2\pi}{1} \right)^2 C \quad (I \Delta z)^2$$

$$P_{\text{ray}} = 10 \cdot \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{2\pi}{1} \right)^2 \cdot C (I \Delta z)^2 = \frac{10 \times 4\pi^2 \cdot \Delta z^2 I^2}{12}$$

$$\text{on a: } I_{\text{eff}} = I \sqrt{2} \Rightarrow P_{\text{ray}} = \frac{40\pi^2 \times 2 I_{\text{eff}}^2 \cdot \Delta z^2}{12} \Rightarrow$$

$$P_{\text{ray}} = 80\pi^2 I_{\text{eff}}^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{1} \right)^2 \quad (70)$$

l'expression (70) est une quantité réelle indiquant une puissance dissipée. Dissipée, dans le sens qu'elle se propage loin de la source et ne peuvent jamais être reconverte. En fait, on utilise les expressions des champs lointains, si on utilise les expressions des champs proche de la source on aurait trouvé une composante imaginaire de la puissance complexe rayonnée. Celle-ci correspond à l'énergie réactive emmagasinée par l'antenne. L'impédance d'entrée de l'antenne est en général complexe.

la partie réelle de l'impédance (en négligeant les pertes diélectriques) représente le rayonnement de l'antenne et la partie imaginaire représente la puissance réactive des champs proches de la source.

Résistance de rayonnement

La résistance de rayonnement du doublet se obtient en écrivant

$$P_{\text{ray}} = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2 = 80\pi^2 \cdot I_{\text{eff}}^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow$$

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \text{ (ohms)} \quad \text{--- (71)}$$

Diagramme de rayonnement

C'est une représentation graphique des propriétés de rayonnement (champ lointain). Si on prend une sphère de rayon r (on fixe r), alors sur la surface de cette sphère le champ $\vec{E} = E_\theta \hat{\theta}$, varie en fonction de θ comme $\sin \theta$.

Donc, 'N'importe quel plan qui contient l'axe oz a le même diagramme de rayonnement car dans l'expression des champs il n'y a pas une dépendance en ϕ . Un tel diagramme est appelé diagramme du plan-E car il contient le vecteur $\vec{E}$. Le diagramme dans un plan perpendiculaire au plan-E (dans ce cas le plan $x-y$). Il s'appelle le diagramme dans le plan-H, car il contient le vecteur $\vec{H}$ (H_ϕ). Les diagrammes de rayonnement dans les plans E et H sont représentés dans la Fig 5.

$$\vec{E}_\theta = \frac{I \Delta z}{4\pi} j\omega\mu \cdot \frac{e^{-j\theta r}}{r} \sin \theta \hat{\theta}$$

en amplitude: $E_\theta = \frac{I \Delta z \omega \mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r}$

On fixe r ($r = d$) $\rightarrow E_{\theta \text{ max}} = \frac{I \Delta z \omega \mu}{4\pi \cdot r}$

Pour tracer le diagramme de rayonnement, on va normaliser le champ E comme suit:

$$\frac{E}{E_{\text{max}}} = f(\theta) = \sin \theta. \text{ fonction caractéristique de l'antenne.}$$

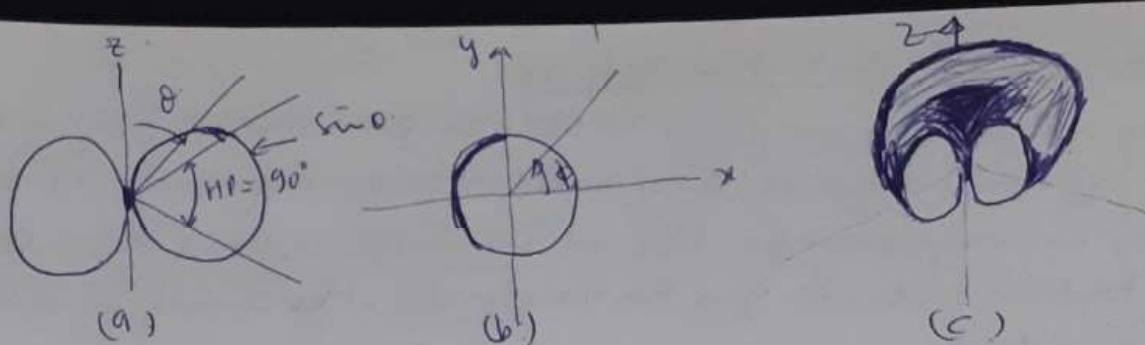


Fig. 5. Diagramme de rayonnement d'un doublet électrique
 (a) diagramme plan- E , diagramme polaire de $|E|$ ou $|H|$. (b) diagramme plan- H , coordonnée polaire
 diagramme de $|E|$ ou $|H|$. (c). diagramme tridimensionnel

Directivité
 Calculons la directivité dans la direction maximale :

$$P_e: D_0 = \frac{U_{max}}{U_0}$$

$$U = r^2 W_{ray} \quad \text{avec} \quad W_{ray} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \hat{a}_r \cdot \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_\theta|^2$$

$$W_{ray} = \hat{a}_r \cdot \frac{1}{2\eta} \left(\frac{I_0 Z_w}{4\pi r} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$$U = r^2 W_{ray} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{I_0 Z_w}{4\pi} \right)^2 \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$U_{max} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{I_0 Z_w}{4\pi} \right)^2 \quad (\sin \theta = 1).$$

$$U_0 = \frac{P_{ray}}{4\pi} = \frac{I_0^2 Z_w^2}{4\pi \times 12\eta} \Rightarrow \quad \text{pour } P_{ray} = \frac{I_0^2 Z_w^2}{12\eta}$$

$$D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} = \frac{\frac{1}{2\eta} \left(\frac{I_0 Z_w}{4\pi} \right)^2 \cdot 4\pi}{\frac{I_0^2 Z_w^2}{12\eta}} \Rightarrow$$

$$\boxed{D_0 = \frac{3}{2}} \quad (72).$$

Longueur effective d'une antenne.

Une antenne en réception est utilisée pour capturer les ondes ET extraire à partir de ces ondes de la puissance. On définit alors la longueur effective d'une antenne pour calculer la tension induite sur les terminaux d'un circuit ouvert de l'antenne.

On définit le vecteur longueur effective $\vec{l}_e$ comme suit :

$$\vec{l}_e(\theta, \phi) = \hat{a}_\theta l_\theta(\theta, \phi) + \hat{a}_\phi l_\phi(\theta, \phi) \quad (73)$$

on l'appelle aussi ~~longueur~~ longueur effective d'une antenne.

Le champ lointain est relié à $\vec{l}_e$ par :

$$\vec{E}_a = \hat{a}_\theta E_\theta + \hat{a}_\phi E_\phi = -j\eta \frac{\beta I}{4\pi r} \vec{l}_e e^{-j\beta r} \quad (74)$$

la tension induit en circuit ouvert est donnée par :

$$V_{oc} = \vec{E}^i \cdot \vec{l}_e \quad (75)$$

ou V_{oc} : tension circuit-ouvert aux terminaux de l'antenne.

$\vec{E}^i$: Champ électrique incident.

$\vec{l}_e$: vecteur longueur effective.