Chapitre 2

Extension - Compression

2.1. Extension (ou traction)

Définition

Une poutre est sollicitée à l'extension simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à l'allonger.

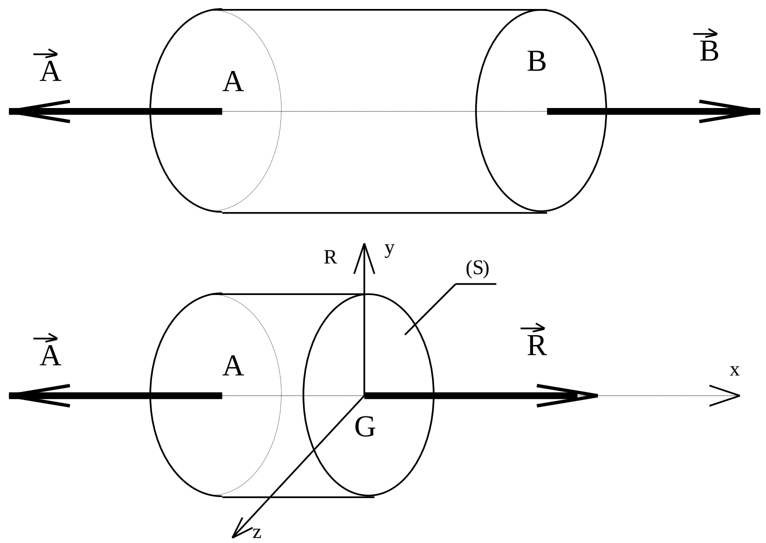


Figure 2.1 Eprouvette sollicité en traction

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{Cohésion\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec N > 0

2.1.1 Essai d'extension

Une éprouvette en acier est sollicitée à l'extension par une machine d'essai, qui permet de déterminer l'allongement de l'éprouvette en fonction de l'effort qui lui est appliqué

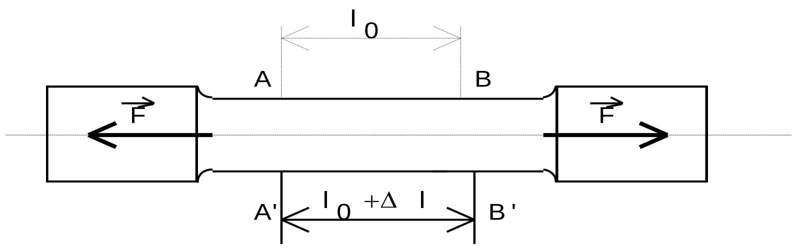


Figure2.2: Représentation de l'éprouvette de traction

On obtient alors la courbe d'essai ci-dessous

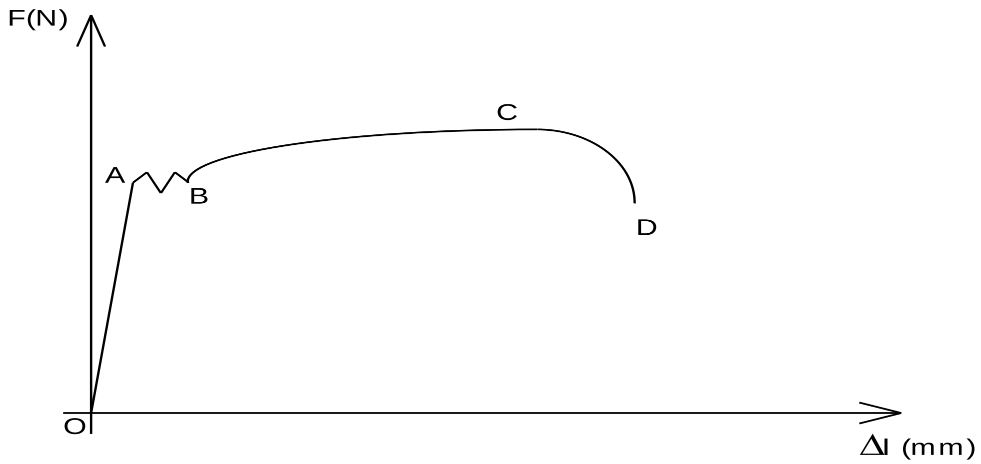


Figure 2.3: Allure de la courbe de l'essai de traction

Analyse de la courbe obtenue

- **Zone OA :** c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa longueur initiale.

  Dans cette zone, l'allongement est proportionnel à l'effort d'extension.

  Des essais effectués avec des éprouvettes de dimensions différentes permettent de constater que pour un même matériau, ***l'allongement unitaire ($\Delta l / l_0$) est proportionnel à l'effort unitaire (F / S_0).***

  Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.

- **Zone ABCD :** c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa longueur initiale.

On ne s'intéressera (pour l'instant) qu'à la zone des déformations élastiques.

2.1.2. Déformations élastiques

La propriété constatée ci-dessus a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{N}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l} \qquad (2.1)$$

Unités : F en (Newton)

S en(mm^2)

E en MPa (N/mm^2)

Δl etl en mm

E est une caractéristique du matériau appelée **module d'élasticité longitudinal** ou **module de Young**.

Tableau 2.1: Module d'élasticité de quelques métaux

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000à160000	200000	120000	70000	400000

Lors de cet essai, on met aussi en évidence une autre caractéristique de l'élasticité ; il existe un rapport constant entre la contraction relative transversale (Δd / d) et l'allongement relatif longitudinal (Δl / l).

On peut écrire :

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \nu\,\frac{\Delta l}{l}} \qquad (2.2)$$

Unités :ν sans unité

Δl et l en mm.

ν est aussi une caractéristique du matériau (coefficient de Poisson), il est de l'ordre de 0 ,3 pour les métaux.

2.1.3 .Contrainte

Soit (E_1) le tronçon de la poutre (E) issu de sa coupure par un plan orthogonal à sa ligne moyenne .

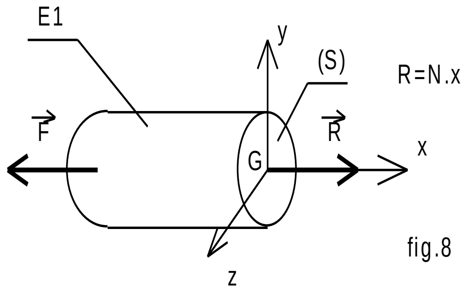


Figure 2.4 tronçon découpé et isolé de la poutre

Le tronçon (E1) est en équilibre sous l'action de F et des efforts de cohésion dans la section droite (S).
Soit S l'aire de la section droite (S). On définit la contrainte σ dans la section droite (S) par la relation :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}} \tag{2.3}$$

avec σ : contrainte normale d'extension (σ > 0) en MPa.

N : effort normal d'extension en Newton.

S : aire de la section droite (S) en mm^2.

La contrainte permet de "neutraliser" la surface et par conséquent de comparer des éprouvettes de sections différentes.

2.1.4. Loi de HOOKE

Nous avons déjà vu que $\sigma = \frac{N}{S}$ et que $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$, on peut en déduire la loi de Hooke exprimée par la formule suivante :

$$\boxed{\sigma = E\frac{\Delta l}{l} = E.\varepsilon} \tag{2.4}$$

$\frac{\Delta l}{l}$ est l'allongement élastique unitaire suivant x, il généralement noté ε

Unités : σ en Mpa

E en Mpa

ε sans unité

2.1.5. Caractéristiques mécaniques d'un matériau

- **Contrainte limite élastique en extension σ_e**

  C'est la valeur limite de la contrainte dans le domaine élastique, appelée aussi limite d'élasticité R_e.

  Pour l'acier, cette valeur est voisine de 300 MPa.

- **Contrainte limite de rupture en extension σ_r**

  C'est la valeur limite de la contrainte avant rupture de l'éprouvette, appelée aussi résistance à la traction R.

  Pour l'acier, cette valeur est voisine de 480 MPa.

- **Allongement A%**

$$A\% = \frac{l - l_0}{l_0} * 100 \tag{2.5}$$

avec :

l_0 : longueur initiale de l'éprouvette.

l : longueur de l'éprouvette à sa rupture.

Pour l'acier, on constate des valeurs de A% voisines de 20%.

2.1.6. Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe}.

On a :

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s} \tag{2.6}$$

s est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\boxed{\sigma_{réelle} = \frac{N}{S} \leq \sigma_{pe}} \tag{2.7}$$

2.1.7. Influence des variations de section

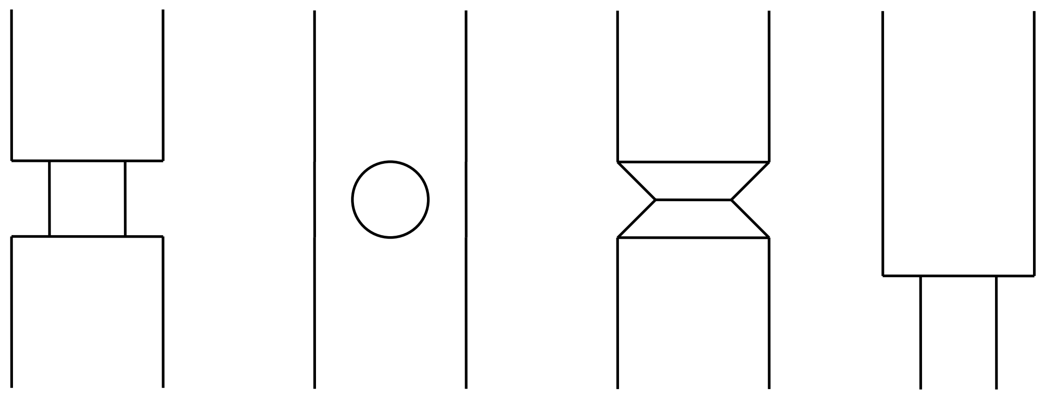
Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus. On dit qu'il y a concentration de contraintes.

On doit alors pondérer nos résultats à l'aide d'un coefficient k, en posant :

$$\sigma_{max} = k.\sigma \qquad (2.8)$$

k est le coefficient de concentration de contraintes

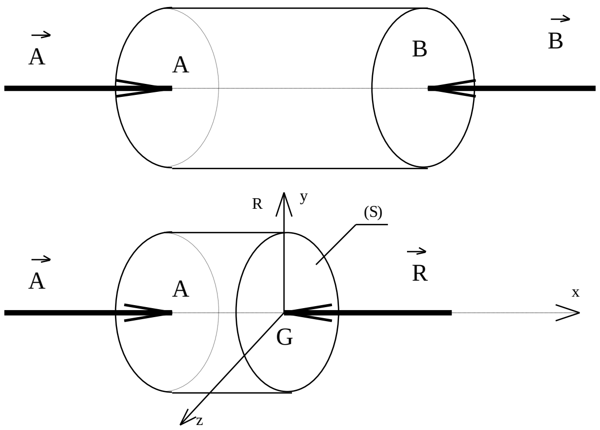
Exemples de cas de concentration de contrainte :



2.2. La compression

Définition

Une poutre est sollicitée à la compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à la raccourcir.

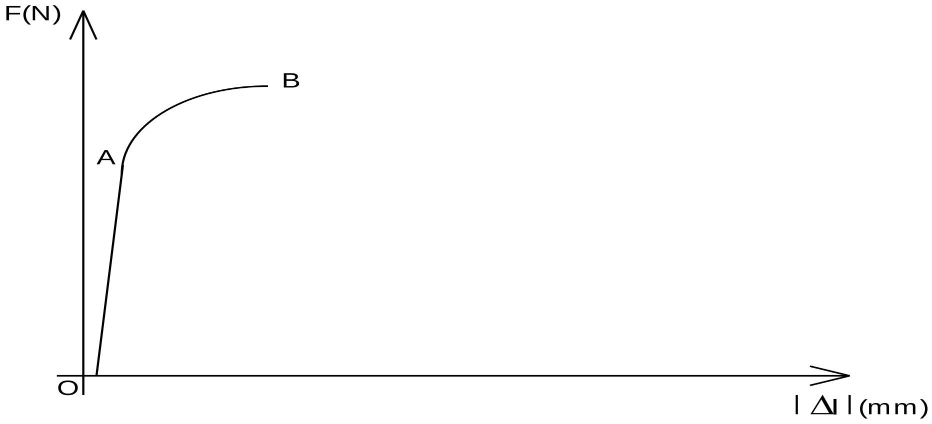


Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{Cohésion\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec } N < 0$$

2.2.1. Essai de compression

Une éprouvette semblable à celle utilisée pour l'essai d'extension en acier est sollicitée à la compression par une machine d'essai.



Analyse de la courbe obtenue

◊ **Zone OA :** c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa longueur initiale.

Dans cette zone, l'allongement est proportionnel à l'effort de compression.

Des essais effectués avec des éprouvettes de dimensions différentes permettent de constater que pour un même matériau, *l'allongement unitaire(* $\Delta l/l_0$*) est proportionnel à l'effort unitaire (*F/S_0*).*

Les sections droites et planes restent droites et planes pendant l'essai.

◊ **Zone AB :** c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa longueur initiale.

2.2.2. Déformations élastiques

La propriété constatée ci-dessus a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{F}{A} = -E\frac{\Delta l}{l} \quad (2.9)$$

avec $\Delta l < 0$

Pour les aciers, le **module d'élasticité longitudinal E** est le même en compression qu'en extension.

2.2.3. Contraintes

On définit la contrainte σ dans la section droite (S) par la relation :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (2.10)$$

avec : $\sigma < 0$ car $N < 0$

2.2.4. Loi de HOOKE

Nous avons déjà vu que $\sigma = \frac{N}{S}$ et que $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$, on peut en déduire que :

$$\boxed{\sigma = E\frac{\Delta l}{l} = E.\varepsilon} \quad (2.11)$$

C'est la loi de Hooke .

$\frac{\Delta l}{l}$ est le raccourcissement élastique unitaire suivant x, il généralement noté ε

2.2.5. Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe}.

On a :

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s} \quad (2.12)$$

s est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\left|\sigma_{r\acute{e}elle}\right| = \frac{|N|}{S} < \sigma_{pe} \quad (2.13)$$

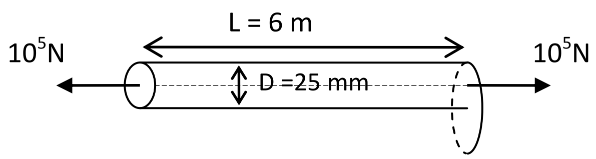
Applications

Exercice N°1

On considère une barre de longueur L = 6m et de section circulaire, de diamètre D = 25mm. La poutre est soumise à ses deux extrémités à une force de de traction F = 10^5N.

Calculer la contrainte, la déformation et l'allongement de la poutre.

Module de Young : E = 2.10^{11}Pa ; Coefficient de Poisson ν = 0.3



Solution :

1) Calcul de la contrainte de traction :

   $\sigma = \frac{F}{S}$,   S= π D²/4 c'est-à-dire s= 3,14x(25)²/4 =490,625 mm²

   σ = 10^5/490,625 = 203,821 N/mm²

2) calcul de la déformation :

   d'après la loi de Hooke σ =ε E ⇒ ε = σ/E

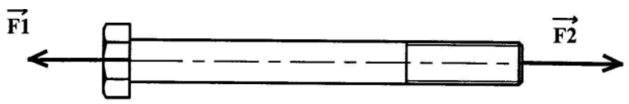
   ε =203,821 /$2,10^5$ = 0,00203 =$2,03.10^{-3}$

3) l'allongement de la poutre

   ε =Δl/l ⇒ Δl =ε .l = 0.00203x6000 = 12,18mm.

Exercice N°2

Soit la vis ci-dessous représentée à échelle 1:2 de longueur 150mm et de diamètre 16mm, en équilibre sous l'action des 2 forces F1 et F2, d'intensité chacune 1000daN. La vis est en acier et son module d'élasticité longitudinal est de 20000daN/mm²



1. A quel type de contrainte est soumise la vis ?

2. Calculer la valeur de la contrainte.

3. Si le coefficient de sécurité nécessaire sur cette pièce est de 4, calculer la résistance élastique que doit avoir la matière.

4. Choisir la nature de l'acier de cette vis parmi la liste suivante:

S185 : Re = 185N/mm² **S235**: Re = 235N/mm² **S275** : Re = 275N/mm²

S355 : Re = 355N/mm² **E295** : Re = 295N/mm² **E360 :**: Re = 360 N/mm²

5. calculer l'allongement de la vis.

Solution :

1. ce type de contrainte est : la traction ou l'extension.
2. Calcul de la contrainte : $\sigma = \frac{F}{S}$, S= π D²/4 = 3,14x(16)²/4 = 200,9 mm²

   $\sigma = \frac{1000}{200,9} = 4,977$daN/mm² ou σ =49,77MPa
3. Calcul de la résistance élastique que doit avoir la matière :

   Soit s coefficient de sécurité s=4 , $\sigma \leq R_e/s \Rightarrow R_e \geq \sigma x\ s = 49,77x4$

   R_e= 199,08 MPa
4. L'acier de la vis sera : S235 :Re =235 MPa
5. Calcul de l'allongement de la vis :

   $\Delta l/l = \sigma/E \Rightarrow \Delta l = l x\ \sigma/E = 150x49,77/200000 = 0,373$ mm.

Exercice N°3

Un câble de diamètre 8mm et de longueur 300m réalisé en acier E295 de module d'élasticité longitudinal E= 200000MPa est soumis à une contrainte de 40MPa.

1. Vérifier que le coefficient de sécurité appliqué sur ce câble est supérieur à 4.

Calculer la force appliquée sur ce câble.

2. Calculer l'allongement de ce câble.

3. Calculer son allongement relatif .

4. Calculer le diamètre que devrait avoir ce câble si le coefficient de sécurité à appliquer sur cette installation doit être égal ou supérieur à 10.

Exercice N°4

Une colonne creuse (d_1=24 mm ;d_2=28 mm), en fonte grise (Re =150N/mm²)et de 1 m de hauteur supporte une charge de 2000N. Prendre E =90000 N/mm².

a) sous cette charge maximum admissible, quel est le facteur de sécurité utilisé ?

b) Quel sera le raccourcissement sous cette charge ?

c) A quelle température devrait-on porter cette colonne pour quelle s'allonge de 1 mm ? le coefficient de dilatation thermique de la fonte est de

   $\alpha = 10{,}5.10^{-6}$ /°C.

d) Quelle est la masse de cette colonne ?(ρ= 7,2 kg/dm^3)