Chapitre 4
Caractéristiques géométriques des sections droites

4.1. Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle important sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe)
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe)
- Moment de résistance

4.2. Aire d'une section

Par définition l'aire *S* d'une section est définie par l'intégrale:

$$S = \iint ds \tag{4.1}$$

Où : S= l'aire de la section droite exprimée en (mm^2 ou cm^2…)

ds est l'élément de de surface.

4.3. Moment statique d'une section droite

Le moment statique Axx' d'une section par rapport à un axe est égal au produit de l'aire de la section parla distance entre son centre de gravité G et l'axexx'.

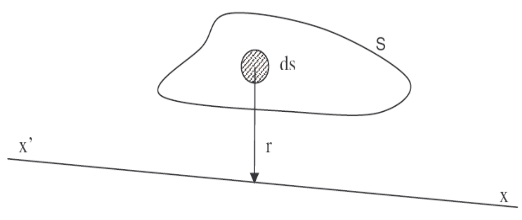


Figure 4.1 : Moment statique

$$As = \iint r . ds \tag{4.2}$$

Avec : r distance de ds à l'axe x'x

Le moment statique A_S d'une section par rapport à un axe *ox* ou *oy*(Figure 4.2) est donné par l'une des expressions suivantes:

$$A_x = \iint y\, ds \tag{4.3}$$

Avec $\Delta s = ds$ élément de surface

Y = distance de M deΔs à l'axe ox

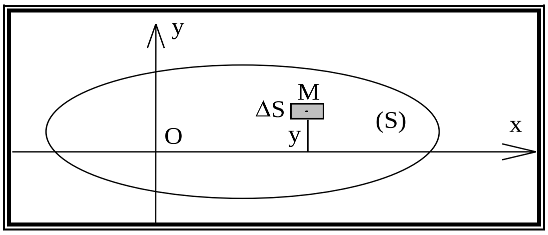


Figure 4.2: Moment statique d'une section droite

De la même façon on a :

$A_y = \iint xds$ où x est la distance de M(de Δs)à l'axe oy

Centre de gravité

le centre de gravité de la surface est un point $G(X_G,Y_G)$tel que par rapport à un axe quelconque passant par ce point , le moment statique est nul.

Le point G a pour coordonnées :

$$X_G = \frac{1}{S}\iint xds = \frac{\sum xiSI}{\sum SI} \tag{4.4}$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\iint yds = \frac{\sum yi\, SI}{\sum SI} \tag{4.5}$$

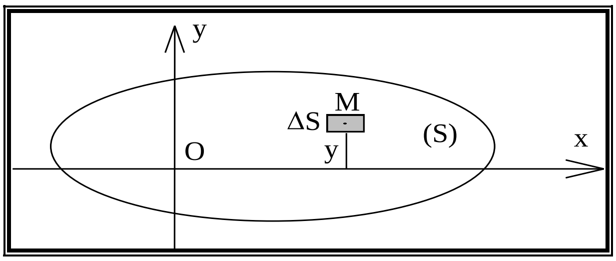
Si on prend l'axe des y du repère $(o,\vec{x},\vec{y})$ pour l'axe x'x on aura :

$\iint xds = \iint rds = X_G.S = A_y$

4.4. Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan

Définition

Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y})$ associé.



Le moment quadratique élémentaire de ΔS par rapport à (O,x) , noté ΔI_{Ox} est défini par

$\Delta I_{Ox} = y^2 . \Delta S$ (4.6)

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_{ox} = \sum_{(S)} y^2 .\Delta S = \iint y^2 ds \qquad (4.7)$$

***Remarque* :**

- L'unité de moment quadratique est le mm^4 (ou le m^4)
- Un moment quadratique est toujours positif.
- Les moments quadratiques des surfaces "simples" sont donnés à la suite du cours.

4.5. Moment quadratique d'une surface plane par rapport a un point (Moment quadratique polaire)

Définition

Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ associé.

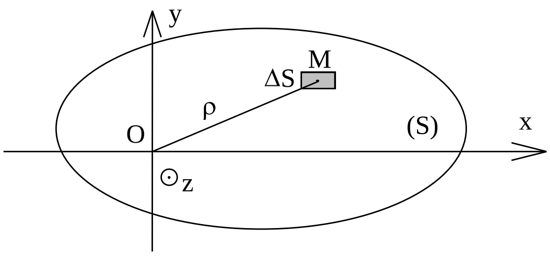


figure :4.3 moment polaire d'une section

Le moment quadratique polaire élémentaire de ΔS par rapport à $(O,\vec{z})$ perpendiculaire en O au plan de la figure et noté ΔI_O est défini par :

$$\Delta I_O = \rho^2 . \Delta S$$

Et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_o = \sum_{(S)} \rho^2 .\Delta S = \iint \rho^2 ds \qquad (4.8)$$

Propriété :

Considérons le moment quadratique polaire I_O de la surface (S) par rapport à $(O,\vec{z})$ perpendiculaire en O à son plan.

Notons : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2 .\Delta S$

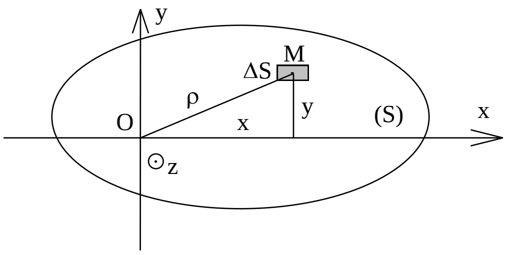


Figure4.4: Moment Quadratique d'une surface plane

Soient x et y les coordonnées du point M. On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

On a donc : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2.\Delta S = \sum_{(S)} x^2.\Delta S + \sum_{(S)} y^2.\Delta S$

Soit : $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$

4.6. Théorème de Huygens ou des axes parallèles

Le moment d'inertie d'une surface plane S par rapport à un axe quelconque Δ de son plan est égal à la somme :

- Du moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe x'x , parallèle à l'axe Δet passant par son centre de gravité G.
- Du produit de cette surface par le carré de la distance d des deux axes.

$$I_\Delta = I_{x'x} + Sd^2 \quad (4.9)$$

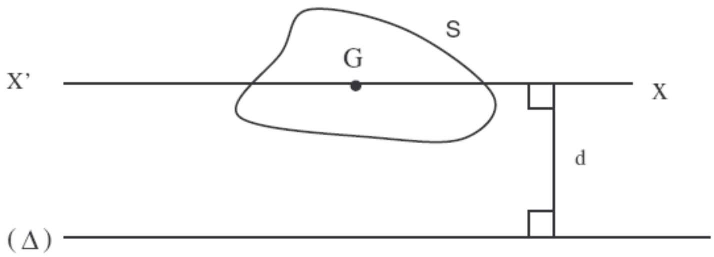


Figure 4.5 : Représentation des axes pour utilisation du théorème Huygens

4.7. Rayon de giration

Le moment d'inertie d'une section plane par rapport à un axe quelconque peut être représenté sous forme du produit de l'aire de cette section par le carré d'une certaine grandeur appelée rayon de giration :

$$Ix = \iint y^2 ds = i^2_x.ds \quad (4.10)$$

i_x étant le rayon d'inertie ou rayon de giration par rapport à l'axe X, d'où :

$$ix = \sqrt{\frac{i_x}{s}} \text{ de même façon } i_y = \sqrt{\frac{i_y}{s}} \quad (4.11)$$

4.8.Moment produit d'inertie et axes principaux

On appelle moment produit, l'intégrale desproduits des propriètés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées xy.

$$I_{xy} = \iint xyds \quad (4.12)$$

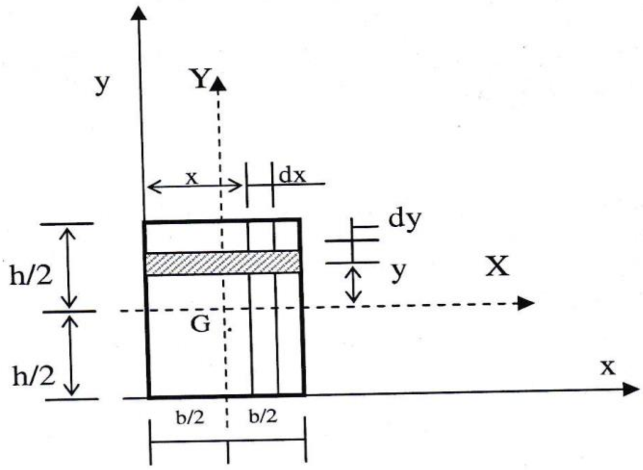
Remarque :

- Les moments quadratiques et polaires sont toujours positifs
- Selon la position des axes, I_{xy} peut être positif, négatif ou nul.
- En chaque point d'une section plane ,il existe deux axes orthogonaux aux quels le produit d'inertie est nul (I_{xy} =0),les axes ainsi définis sont appelés axes principaux.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section.

Exemple de moment quadratique pour quelques

Cas d'une section rectangulaire

Soit la section rectangulaire suivante :déterminer les caractéristiques géométriques de cette surface.



a- <u>Surface</u>

S= $\iint ds$ =$\iint dxdy$ =$\int_0^h dy.\int_0^b dx$ =b.h

Ou bien ds=b.dy ===>S= $\int_0^h b.dy$ =b.h

b- Position du centre de gravité G

$A_x = \int yds = \int_0^h ybdy = \frac{b.h^2}{2}$

$A_y = \int x.ds = \int_0^b x.hdx = \frac{hb^2}{2}$

$X_G = \frac{Ay}{S} = \frac{b.^2h}{2.b.h} =$ b/2

$Y_G = \frac{Ax}{S} = \frac{b.h^2}{2.b.h} =$ h/2

c- Moment d'inertie

$I_X = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2\, ds = \int_{-h/2}^{+h/2} b.y^2 dy$ = b.h³/12

D'après le théorème de Huyghens

$I_x = I_X + S.(h/2)^2$ ===> $I_x = b.h^3/3$

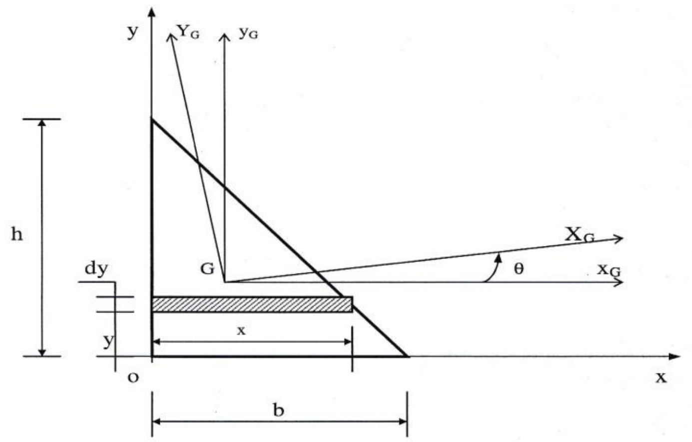
On trouve de même

$I_Y = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 ds = \int_{-b/2}^{+b/2} bx^2 dx = hb^3/12$

Le moment produit sera égal :

$I_{XY} = \int_0^b x dx \int_0^h y dy \Rightarrow I_{XY} = \frac{b^2h^2}{4}$

1) Cas d'un triangle



a) Surface et centre de gravité

L'élément de surface ds= xdy $S=\int ds$ or $\frac{x}{h-y} = \frac{b}{h}$ alors

$x=\frac{b(h-y)}{h}$

$S=\int_0^h \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)dy$ = bh/2

S= bh/2

Les moments statiques sont :

$A_x = \int y\, ds = \int_0^h \frac{b}{h}(h+y)ydy$ =bh²/6

$A_y = \int x.ds = \int_0^b \frac{h}{b}(b-x)xdx$ = hb²/6

Alors les coordonnées du centre de gravité sont :

$X_G = \frac{Ay}{S} = \frac{hb^2 2}{6bh}$ =, b/3

$Y_G = \frac{Ax}{S} = \frac{bh^2 2}{6bh}$ = h/3

b) Moment d'inertie

$I_x = \int y^2 ds = \int_0^h y^2 (\frac{b}{h}(h-y)dy$= bh³/12

$I_y = \int x^2 ds = \int_0^b x^2.\frac{h}{b}(b-x)dx$ = bh³/12

c) Le moment produit I_{xy} :

$$I_{xy} = \int XYds \quad = b^2h^2/24$$

d) Axes principaux en O

$$tg2\alpha = \frac{-2Iyx}{Ix-Iy} = \frac{-12.2b^2h^2}{24(bh^3-hb^3)} = \frac{-bh}{(h^2-b^2)}$$

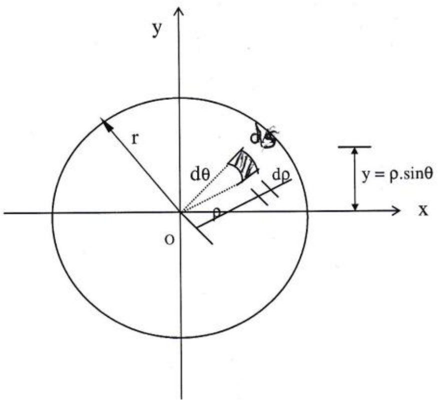
e) Axes principaux en G

$$tg\ 2\Theta = \frac{-2IyGxG}{IxG-IyG} = \frac{-bh}{(h^2-b^2)}$$ec :

Avec: $\begin{cases} I_{xG} = I_X-(YG)2.S = bh^3/36 \\ I_{yG} = hb^3/36 \end{cases}$

2) Cas d'une section circulaire

soit la section circulaire suivante , de rayon r et de diamètre D.



a) Surface

L'élément hachuré est approximativement un rectangle et sa surface à pour expression:

$$dS = \rho.d\theta.d\rho$$

$$S = \iint \rho d\theta\, d\rho = \int_0^r \rho d\rho . \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} r^2 2\pi \Rightarrow S = \pi D^2/4$$

b) Moment d'inertie

$$I_X = \int y^2 ds$$

On sait que : $y = \rho \sin\theta$ et $dS = \rho.d\theta.d\rho$

$$I_X = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin^2 2\theta\ \rho.d\theta.d\rho = \pi r^4/4$$

Pour d =2r alors $I_X = I_Y = \pi D^4/64$

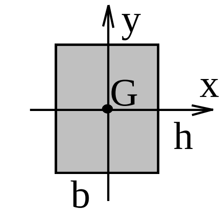
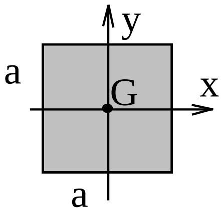
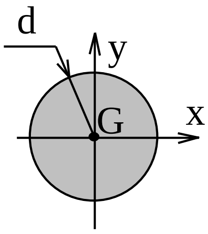
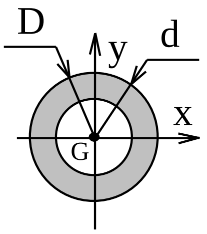
Le moment polaire de la section circulaire par rapport au centre o du cercle est égal à :

$I_o = I_X + I_y = 2I_x = \pi D^4/32$

4.9. Moments quadratiques utiles

Nous présentons quelques moments quadratiques de quelques sections souvent utilisée en RDM dans le tableau suivant :

Tableau4.2: Exemple de Moments quadratique de quelques sections

	I_{GX}	I_{GY}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$