2. Modèle cinématique

Modèle cinématique: il nous donne la relation entre les *vitesses* des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et la *vitesse* linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et angulaire $\boldsymbol{\omega}_e$ de l'effecteur du robot par rapport au repère de la base

L'application $\dot{\mathbf{q}} \longrightarrow (\dot{\mathbf{p}}_e\,,\ \boldsymbol{\omega}_e)$ est décrite par une matrice, le **jacobien géométrique**, qui dépend de la configuration $\mathbf{q}$ du manipulateur

Jacobien d'un manipulateur

• Le jacobien est l'un des outils les plus *importants* pour la caractérisation d'un manipulateur

• En effet, le jacobien est utile pour:

- Trouver les singularités d'un robot
- Analyser la redondance d'un robot
- Développer des algorithmes pour le calcul du MGI
- Décrire la relation entre les forces appliquées à l'effecteur et les forces résultantes au niveau des articulations
- Dériver les équations dynamiques du mouvement d'un robot
- Concevoir des stratégies de contrôle dans l'espace opérationnel

Rappel:

Soit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, le jacobien de $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_m]^T$ est une matrice $m \times n$ définie par:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Considérons un manipulateur avec n articulations. Nous pouvons écrire le *modèle géométrique direct*:

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$ est le vecteur des variables articulaires

La position et orientation de l'effecteur *change* avec $\mathbf{q}$

Objectif: exprimer la vitesse linéaire $\dot{\mathbf{p}}_e$ et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_e$ de l'effectuer en fonction des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$

Rappel: Les trois composantes de $\boldsymbol{\omega}_e$ représentent les composantes de la vitesse angulaire de l'effectuer par rapport au repère de la base

Les relations cherchées sont toutes les deux *linéaires* par rapport aux vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

où

$\mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse linéaire* de l'effecteur $\dot{\mathbf{p}}_e$

$\mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$: matrice qui relie la contribution des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ à la *vitesse angulaire* de l'effecteur $\boldsymbol{\omega}_e$

Sous une forme compacte:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

Equation de la cinématique d'un manipulateur

La matrice:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times n}$$

est le ***jacobien géométrique*** d'un manipulateur (une fonction du vecteur des variables articulaires $\mathbf{q}$, en général)

Calcul du jacobien

Pour calculer le jacobien géométrique, il convient de **procéder séparément** pour les *vitesses linéaires* et *angulaires*

Pour la contribution à la vitesse linéaire, on peut écrire la dérivée de $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$ par rapport au temps comme:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\,\mathbf{p}_e}{\partial\,q_i}\,\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \jmath_{P_i}\,\dot{q}_i$$

$\jmath_{P_i}\,\dot{q}_i$: contribution de la vitesse de l'articulation i à la *vitesse linéaire* de l'effecteur lorsque toutes les autres articulations sont immobiles

Articulation prismatique:

Si l'articulation i est prismatique ($q_i = d_i$):

$$\jmath_{P_i}\,\dot{q}_i = \dot{d}_i\,\mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$\jmath_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Articulation rotoïde:

Si l'articulation i est rotoïde ($q_i = \theta_i$), en observant que la contribution à la vitesse linéaire doit être calculée par rapport à l'origine du repère de l'effecteur, nous avons:

$$\jmath_{P_i}\dot{q}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,e} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

et donc:

$$\jmath_{P_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

Pour la contribution à la vitesse angulaire, on a:

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} \jmath_{O_i}\dot{q}_i$$

On peut encore caractériser les termes $\jmath_{O_i}\dot{q}_i$ séparément

Articulation prismatique:

Si l'articulation i est prismatique:

$$\jmath_{O_i}\dot{q}_i = \mathbf{0}$$

et donc:

$$\jmath_{O_i} = \mathbf{0}$$

Articulation rotoïde:

Si l'articulation i est rotoïde:

$$\jmath_{O_i}\dot{q}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

et donc:

$$\jmath_{O_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Conclusion:

Le jacobien $\mathbf{J}$ peut être partitionné en vecteurs colonnes $\jmath_{P_i}, \jmath_{O_i} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, de la manière suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \jmath_{P_1} & \jmath_{P_2} & \cdots & \jmath_{P_n} \\ \jmath_{O_1} & \jmath_{O_2} & \cdots & \jmath_{O_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times n}$$

où

$$\begin{bmatrix} \jmath_{P_i} \\ \jmath_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est } \textit{prismatique} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est } \textit{rotoïde} \end{cases}$$

- $\mathbf{z}_{i-1}$ est donné par la troisième colonne de la matrice de rotation $\mathbf{R}_{i-1}^{0}$
- $\mathbf{p}_e$ est donné par les trois premiers éléments de la quatrième colonne de la matrice de transformation $\mathbf{T}_e^0$
- $\mathbf{p}_{i-1}$ est donné par les trois premiers éléments de la quatrième colonne de la matrice de transformation $\mathbf{T}_{i-1}^0$

En effet, $\mathbf{z}_{i-1}$, $\mathbf{p}_e$, $\mathbf{p}_{i-1}$ sont des fonctions des variables articulaires

Remarques

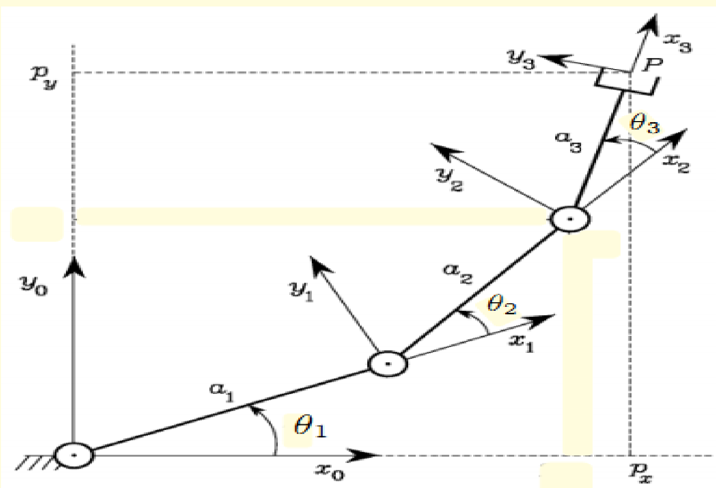
- Cette méthode systématique permet de trouver J avec la seule connaissance du modèle géométrique.
- Cette méthode ne nécessite aucune dérivée, elle peut donc être facilement implémentée dans un langage informatique.
- Cette méthode suppose que le modèle géométrique ait été modélisé avec la convention de DH et notamment que les axes z soient colinéaires aux axes du robot.

Remarque: les équations précédentes permettent de calculer le jacobien géométrique par rapport au repère de la base (le repère "0")

- Si on veut répresenter le jacobien dans un repère différent "u", il suffit de connaître la matrice de rotation relative $\mathbf{R}^u$
- La relation entre les vitesses dans les deux repères est donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \boldsymbol{\omega}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J}}_{\mathbf{J}^u\text{ : jacobien géométrique dans le rep. "}u\text{"}} \dot{\mathbf{q}}$$

1 - Manipulateur planaire à 3 segments



Trois articulations rotoïdes. Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 \\ a_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) + a_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) + a_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles à l'axe z_0):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque:

- Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composantes de la vitesse linéaire le long des axes x_0 et y_0, et à la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe z_0

- En effet, 3 DDL permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur: v_z, ω_x, ω_y sont toujours zéro pour ce manipulateur

Singularités cinématiques

- Le jacobien définit une application linéaire

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}$$

entre le vecteur des vitesses des articulations $\dot{\mathbf{q}}$ et le vecteur des vitesses de l'effecteur $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e^T, \ \boldsymbol{\omega}_e^T]^T$

Les configurations où le jacobien n'a pas **rang plein** sont appelées **singularités cinématiques** du robot

Trouver le singularities d'un manipulateur est important parce que:

1. Les singularités sont des configurations où la *mobilité du robot est réduite*, c'est-à-dire il n'est pas possible d'imposer un mouvement arbitraire à l'effecteur. Au voisinage des positions singulières, le robot perd des degrés de liberté

2. Si le robot est à une singularité, on peut avoir *une infinité de solutions* au problème géométrique inverse

3. Au voisinage d'une singularité, des *petites vitesses* dans l'espace opérationnel peuvent produire des *grandes vitesses* dans l'espace articulaire

Remarque: les configurations d'un robot qui sont singulières pour le *modèle géométrique inverse* les sont aussi pour le jacobien

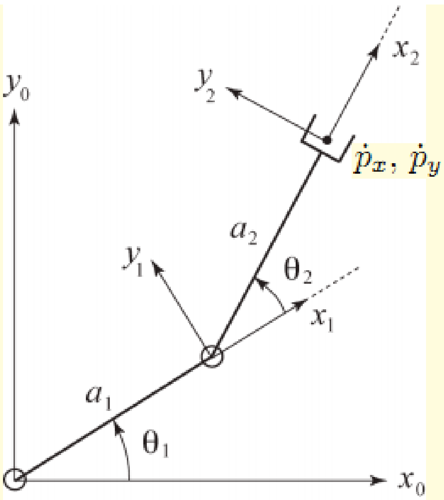
Il y a **deux types** de singularités:

1) Les singularités **aux limites du volume de travail** qui apparaissent lorsque le bras est complètement étendu (ou rétracté).
   - Elles peuvent être évitées: elles ne constituent pas un véritable problème

2) Les singularités **à l'intérieur du volume de travail** qui apparaissent lors de l'*alignement* de deux ou plus axes du robot, ou pour des configurations particulières de l'effecteur.
   - Elles sont critiques car on peut les rencontrer partout dans le volume de travail

Singularités cinématiques

Exemple [Manipulateur planaire à deux segments]



On consider seulement les composantes de la vitesse linéaire $\dot{p}_x, \dot{p}_y$ de l'effectuer dans le plan

- Le jacobien est donc la matrice 2 × 2:

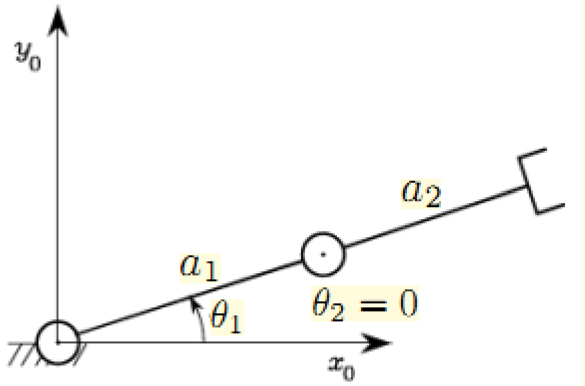
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

- Pour analyser le rang du jacobien, on peut calculer son *déterminant*

- On trouve que: $$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 \sin\theta_2$$

- Si $a_1, a_2 \neq 0$ le determinant est zéro lorsque:

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_2 = \pi$$ (bras complètement étendu ou rétracté)



• On a trouvé des *singularités de type 1*

• Si on analyse le mouvement différentiel pour $\theta_2 = 0$, on observe que les deux colonnes du jacobien:

$$[-(a_1 + a_2)s_1 \quad (a_1 + a_2)c_1]^T, \quad [-a_2 s_1 \quad a_2 c_1]^T$$

deviennent parallèles et le rang du jacobien devient 1

• Cela veut dire que les composantes de la vitesse de l'effecteur $\dot{p}_x, \dot{p}_y$ ne sont pas indépendantes

Modèle cinématique inverse

Objectif : déterminer les vitesses des articulations du manipulateur afin d'atteindre une vitesse de l'effecteur donnée

1. **Cas régulier**: Si le jacobien est *carré* ($n \times n$) et il a *rang plein*, on trouve que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}_e$$

• Note que si $\mathbf{q}(0)$ est connu, la position des articulations peut être obtenue par integration des vitesses articulaires dans le temps:

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\tau)\, d\tau + \mathbf{q}(0)$$

• On peut intégrer cette équation différentielle en temps discret en utilisant, par exemple la *méthode d'intégration d'Euler*. Si le pas d'intégration Δt et les positions et vitesses au temps t_k sont connues, les positions des articulations au temps $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ peuvent être calculées via:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))\mathbf{v}_e(t_k)\Delta t$$

Ceci permet ainsi de trouver une solution du *problème géométrique inverse*

2. **Cas redondant**: si le robot est *redondant*, $r < n$ où n est le nombre de DDL du robot et r le nombre de variables dans l'espace operationnel nécessaires à spécifier une tâche assignée, le jacobien a plus colonnes que lignes et $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ a un *nombre infini* de solutions. $n - r$ représente le degré de redondance du robot

Plusieurs méthodes de résolution sont envisageables:

a) Ajouter $n - r$ relations supplémentaires pour que J devienne carrée (blocage d'articulation, contrainte d'optimisation)

b) Trouver une solution particulière en ne considérant que r articulations (au lieu de n), puis calculer les valeurs de toutes les articulations en prenant en compte un critère d'optimisation

c) Utiliser la méthode de résolution basée sur la notion de **pseudo-inverse**

3. **Cas singulier**:

• Les solutions précéndentes (*cas régulier* et *cas redondant*) peuvent être calculées seulement si le jacobien a **rang plein**

• Ces solutions perdent toute signification lorsque le manipulateur se trouve dans une configuration singulaire: dans ce cas, le système

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}}$$

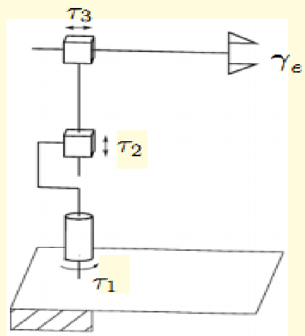
contient des *équations linéairement dépendantes*

• Pour résoudre le problème d'inversion du modèle cinématique au voisinage d'une singularité, on peut recourir à une *inversion par moindres carrés amortis*:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k^2\,\mathbf{I}_m)^{-1}$$

où k est un *factuer d'amortissement* qui rend l'inversion mieux conditionnée du point de vue numérique (m est le nombre de variables dans l'espace operationnel)

Statique



Objectif de la statique: déterminer la rélation entre les forces généralisées appliquées à l'effecteur et les forces généralisées appliquées aux articulations (forces pour les art. prismatiques et couples pour les art. rotoïdes) avec les manipulateur dans une configuration d'*équilibre statique*

Soit:

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$: vecteur des couples exercés par les actionneurs sur les articulations du robot

$\boldsymbol{\gamma}_e \in \mathbb{R}^r$: vecteur des forces agissant sur l'effecteur, où r est la dimension de l'espace opérationnel d'intêret

L'application du "*Principe des Travaux Virtuels*", nous permet d'écrire l'équation:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\gamma}_e}$$

Conclusion: la **transposée du jacobien géométrique** d'un manipulateur met en relation les forces sur l'effecteur avec les couples sur les articulations