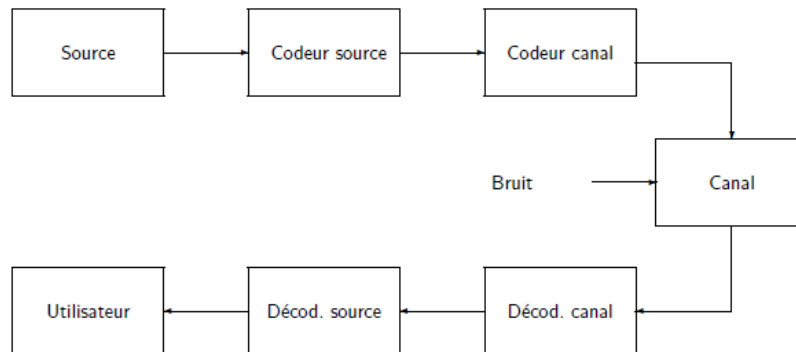


1. DÉFINITIONS :

La théorie des communications s'intéresse aux moyens de transmettre une information depuis la source jusqu'à un utilisateur à travers un canal.



Source : texte, voix, image (fixe ou animée), . . .

Canal : radio, fil, sans fil, fibre optique, support magnétique/optique,

Bruit : perturbations électromagnétiques, rayures, . . .

Deux problématiques :

Codage source : utiliser le minimum de ressources

→ **Problème d'Efficacité** : compresser efficacement une source donnée à un taux de compression maximal.

Codage canal : Transmettre efficacement le maximum d'information à travers un canal bruité

→ **Problème de Fiabilité** : Restituer à l'utilisateur une information suffisamment fidèle à celle produite par la source (sans ou avec le minimum d'erreur).

2. SOURCE ET CODAGE DE SOURCE :

On considère le message produit par la source comme un signal aléatoire dont on peut connaître les probabilités d'occurrence des symboles $p(x)$:

Exemple 01 : on a une source binaire équiprobable '010010111001' :

Donc, on a $p(0)=p(1)=0.5$

aussi $\sum_i p(x_i) = p(0) + p(1) = 1$.

Exemple 02 : Source binaire biaisée '110111100111111' :

$p(0)=1-p(1)=3/15=0.2$

Exemple 03 : un message source est comme suit 'aabaababaa' :

$p(a)=1-p(b)=0.7$ tandis que $p(b)=0.3$

Exemple 04 : Soit une source d'information qui fournit comme information l'une des quatre lettres a_1, a_2, a_3, a_4 . Supposons que le codage de source transforme cette information discrète en symboles binaires (bits). Nous donnons deux exemples de codage différents :

Codage 1	Codage 2
$a_1 \rightarrow 00$	$a_1 \rightarrow 0$
$a_2 \rightarrow 01$	$a_2 \rightarrow 10$
$a_3 \rightarrow 10$	$a_3 \rightarrow 110$
$a_4 \rightarrow 11$	$a_4 \rightarrow 111$

Cas 1 : Si les 4 lettres sont équiprobables : $p(a_1)=p(a_2)=p(a_3)=p(a_4)$:

on aura besoin de $2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$ bits/lettre pour coder selon la première méthode.

on aura besoin de $1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.25$ bits/lettre pour coder selon la deuxième méthode.

Donc le premier codage est le meilleur.

Cas 2 : Si $p(a_1)=\frac{1}{2}$, $p(a_2)=\frac{1}{4}$, $p(a_3)=p(a_4)=\frac{1}{8}$:

on aura besoin de $2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 2$ bits/lettre pour coder selon la première méthode.

on aura besoin de $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.75$ bits/lettre pour coder selon la deuxième méthode.

Le deuxième codage réussit donc à coder quatre lettres avec moins de deux bits. Il a réalisé une compression.

Conclusion : Pour coder correctement une source, il est donc important de connaître son comportement statistique.

2.1. Information et Entropie d'une source

Si une lettre 'a' a une probabilité $p(a)$ d'être tirée, son **information propre** $I(a)$ est définie par :

$$I(a) = \log_2 p\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_2 p(a)$$

$I(a) = 0$ si $p(a) = 1$.

La valeur moyenne de l'information propre calculée sur l'ensemble de l'alphabet a une grande importance. Elle est appelée l'**Entropie de la source** $H(A)$:

$$H(A) = - \sum_{a \in A} p(a) \log_2 p(a)$$

Exemple 01 : Source binaire équiprobable

$$X = \{0,1\}, \quad p(0) = p(1) = 0.5$$

$$H(X) = 1 \text{ bit par symbole}$$

Exemple 02 : Source binaire biaisée

$$X = \{0,1\}, \quad p(0) = 1 - p(1) = 0.2$$

$$H(X) = 0.75 \text{ bit par symbole}$$

Exemple 03 : les 26 lettres de l'alphabet

$$X = \{A, B, C, \dots, Z\}, \quad p(x) = 1/26$$

$$H(X) = 4.7 \text{ bits par lettre}$$

Exercice : Soit $X = \{a, b, c, d\}$ où $p(a) = 1/2, p(b) = 1/4, p(c) = p(d) = ?$

Calculer l'entropie de cette source ?

$$H(X) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} = \frac{7}{4}$$

3. CANAL ET CODAGE CANAL :

Canal : signifie le modèle mathématique du canal situé entre l'émetteur et le récepteur.

Pour définir un canal de transmission, on décrit l'ensemble des entrées et des sorties possibles du canal ainsi que la bruit qui peut perturber la transmission.

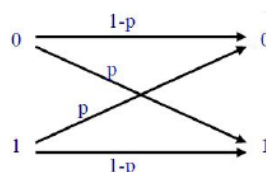
Le canal discret est le plus simple des canaux de transmission. L'ensemble des entrées et l'ensemble des sorties sont deux alphabets finis X et Y .

Le canal est discret sans mémoire si le bruit se modélise comme une probabilité conditionnelle de Y sachant X indépendante du temps.

Un canal discret sans mémoire est donc défini par :

- l'alphabet d'entrée X ,
- l'alphabet de sortie Y ,
- la matrice de transition $\Pi = \Pi_{ij}$ où $\Pi_{ij} = \text{prob}(y_j/x_i)$.

Exemple 01 : le canal binaire symétrique (p = probabilité d'erreur)



$$X = \{0,1\}, Y = \{0,1\} \text{ et } \Pi = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

$$\text{prob}(0|0) = \text{prob}(1|1) = 1 - p$$

$$\text{prob}(1|0) = \text{prob}(0|1) = p$$

Remarque : le rôle d'un transmetteur/récepteur est de gérer les erreurs du canal.

4. THEOREMES DE SHANNON :

Grâce à la théorie de l'information, Shannon a prouvé l'existence d'une solution optimale pour transmettre un signal donné sur un canal donné par la séparation entre les codeurs de source et de canal (*codage source canal en série -en tandem-*) pour atteindre la solution optimale.

Premier théorème de Shannon (Codage de source) :

1. On peut coder toute source en utilisant un nombre de bits par lettre aussi proche que l'on veut de son entropie : $H(X) \leq L < H(X) + 1$
2. On ne peut pas faire mieux.

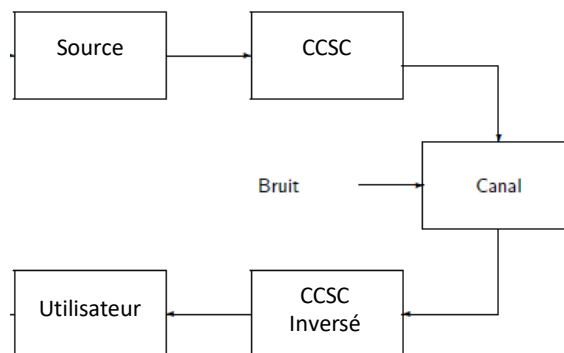
Second théorème de Shannon (Codage de canal) :

1. On peut transmettre de l'information de façon fiable en utilisant un code correcteur d'erreur de taux de transmission inférieur à la capacité du canal utilisé.
2. On ne peut pas faire mieux.

Question : est-il possible de combiner les codeurs de source et de canal de sorte qu'on puisse réduire la complexité des deux côtés, tout en perdant très peu en performances.

5. CODAGE CONJOINT :

Réponse : codage conjoint source-canal (CCSC) : on se préoccupe de la minimisation de la distorsion totale en considérant simultanément l'impact des erreurs de transmission et du codage de source sur cette distorsion.



Donc, codage conjoint source-canal (CCSC) s'agit de coder la source de façon plus intelligente afin de minimiser la distorsion moyenne globale due à la quantification et au bruit du canal.