

# Chapitre

## 4

### *Notion Physiques élémentaires sur la stabilité des écoulements*

#### 4.1. Exposé du problème

L'instabilité des solutions des équations est due au terme non-linéaire de transport de quantité de mouvement  $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ . Elles correspondent à une bifurcation de la solution obtenue pour une certaine valeur du nombre de Reynolds. On rencontre divers types d'instabilités :

- Instabilité de cisaillement bidimensionnelle pour des profils de vitesse perpendiculaire à l'écoulement ayant un point d'inflexion (instabilité de Kelvin-Helmholtz). Le tourbillon généré est dans le plan de l'écoulement ;
- Instabilités centrifuges de type Taylor-Couette qui se crée lorsque le moment cinétique  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$  décroît lorsque l'on s'éloigne du centre de courbure. Le tourbillon généré est perpendiculaire à l'écoulement, conduisant par exemple aux tourbillons de Görtler. Il existe nombre d'autres instabilités de type inertiel telles les instabilités elliptiques et instabilité de Crow rencontrées en aéronautique ou en géophysique.

#### 4.2. Exemples d'instabilités de mouvements de fluides

##### 4.2.1. Instabilité de Taylor -Couette

Les travaux sur les écoulements tournants ont suscité la curiosité du monde scientifique depuis une centaine d'années. Tout a débuté par les travaux de Maurice Couette qui étudia l'écoulement entre deux cylindres tournants dans le but de déterminer la viscosité d'un fluide [18]. Il réalisa pour cela des mesures du couple exercé par le fluide sur le cylindre

intérieur. C'est cette première étude qui est à l'origine du développement des rhéomètres de Couette que l'on connaît de nos jours [19].

Taylor [20] s'est lui intéressé à la stabilité de cet écoulement. Il a trouvé avec un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux que lorsque la vitesse de rotation du cylindre intérieur dépasse une valeur seuil, des tourbillons apparaissent (instabilité primaire). Ces tourbillons portent aujourd'hui son nom : "tourbillons ou vortex de Taylor". Pour des vitesses encore plus élevées, ces vortex oscillent périodiquement (instabilité secondaire) jusqu'à ce que l'écoulement devienne complètement chaotique (turbulence). Les résultats de Taylor ont été vérifiés par plusieurs études expérimentales ultérieures. L'écoulement de Taylor-Couette, l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs tournant à des vitesses angulaires différentes est devenu au fil des années le paradigme pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et la transition à la turbulence des systèmes dynamiques non linéaires. Les premières études concernent principalement les fluides newtoniens. Une synthèse de ces différents travaux sur le problème peut se trouver dans deux principaux articles de revue [21,22].

L'écoulement de base, c'est-à-dire l'écoulement de Couette Circulaire, ECC, est purement azimutal et présente seulement une variation radiale à travers l'espace annulaire entre les deux cylindres (entrefer). Les premières études portent sur l'analyse linéaire des instabilités qui se développent lorsque l'écoulement de base est soumis à une perturbation axisymétrique. Il a été montré que, pour un fluide parfait, l'apparition des instabilités est gouvernée par le critère de Rayleigh : l'ECC est instable pour une perturbation axisymétrique lorsque la dérivée du carré du moment angulaire,  $dL^2/dr$ , est négative pour au moins une position radiale [23]. Dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ , où  $Re_1$  et  $Re_2$  sont les nombres de Reynolds construits avec la vitesse angulaire de rotation des cylindres intérieur et extérieur respectivement, les domaines stables et instables sont séparés par une ligne dénommée "la ligne de Rayleigh", figure 4.1.

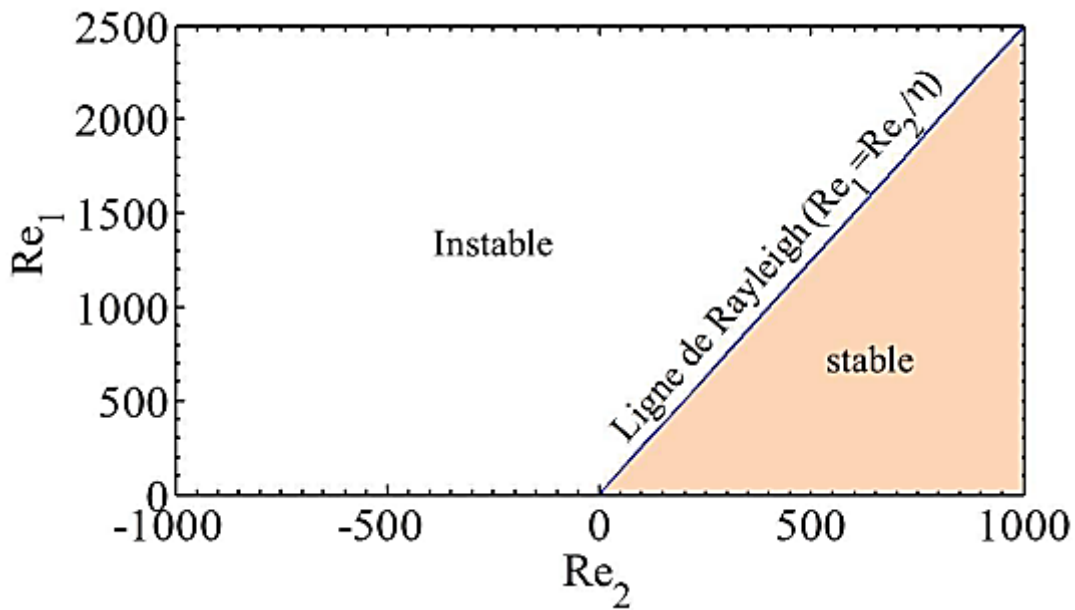


Fig. 4.1- Délimitation des zones stable et instable suivant le critère Rayleigh pour un fluide newtonien avec un rapport de rayons  $\eta = 0.4$ .

Pour un fluide newtonien, la ligne de Rayleigh est donnée par  $Re_2 / Re_1 = \eta$ , avec  $\eta = R_1/R_2$  le rapport de rayons intérieur et extérieur. Sur cette ligne, le moment angulaire est uniforme dans tout l'espace annulaire. Dans la région stable de Rayleigh, on a  $dL^2/dr > 0$  dans tout l'entrefer. Par ailleurs, dans la zone instable du plan  $(Re_1, Re_2)$ , qui se trouve majoritairement dans la zone où les deux cylindres tournent en sens opposés (la configuration contra-rotative),  $dL^2/dr$  est négatif au voisinage de la paroi du cylindre intérieur mais reste positif près du cylindre extérieur. Ce comportement au voisinage de la paroi du cylindre intérieur a un grand effet sur la longueur d'onde du mode critique [20]. [24] ont montré en utilisant une approximation WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) pour les grandes longueurs d'ondes que le critère de Rayleigh peut être généralisé à une perturbation non axisymétrique.

Lorsque la viscosité est prise en compte, les instabilités apparaissent si les forces centrifuges déstabilisantes surpassent les forces visqueuses à une échelle de temps inférieure au temps de diffusion. Ainsi, lorsque le cylindre extérieur est fixe par exemple, le moment angulaire décroît du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur. Les instabilités de l'écoulement ECC apparaissent via une perturbation axisymétrique stationnaire avec des rouleaux toroïdaux contra-rotatifs régulièrement espacés dans la direction axiale [20].

Dans une configuration contra-rotative,  $dL^2/dr$  est négatif au voisinage du cylindre intérieur mais est fortement positif près du cylindre extérieur. Il est montré par l'analyse linéaire de

stabilité que pour des vitesses angulaires de rotation du cylindre extérieur suffisamment élevées, l'ECC devient instable du fait de perturbations non axisymétriques [25-27]. Le nombre d'onde azimutal qui caractérise l'orientation des structures instables augmente avec le nombre de Reynolds du cylindre extérieur [27]. Dans ce cas, les structures sont des tourbillons en forme de spirale, enroulés autour du cylindre intérieur. Ces vortex obliques sont la superposition d'ondes se propageant dans la direction axiale et d'ondes tournant dans la direction azimutale [22, 28]. Dans le domaine instable selon le critère de Rayleigh,  $L^2$  décroît quand la position radiale  $r$  augmente du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur, et l'ECC est le siège d'une instabilité caractérisée par l'apparition des rouleaux toroïdaux.

En augmentant le nombre de Reynolds du cylindre intérieur au-delà du nombre de Reynolds critique, différents régimes d'écoulement peuvent être observés selon que les deux cylindres tournent ou que seul le cylindre intérieur tourne. [29] ont étudié par visualisation une vaste diversité d'écoulement dans le plan ( $Re_1$ ,  $Re_2$ ). En fonction des valeurs de  $Re_1$  et  $Re_2$ , il peut apparaître dans l'écoulement des tourbillons de Taylor, des tourbillons de Taylor ondulés, des tourbillons hélicoïdaux ou spirales, des spirales ondulées, des spirales turbulentes, des rides, etc. Ils ont ainsi identifié près de 20 régimes d'écoulement différents comme le montre la figure 4.2. Lorsque le cylindre extérieur est fixe, ou pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds  $Re_2$ , la transition vers la turbulence découle d'une succession d'instabilités (tourbillons toroïdaux, des ondulations et des modulations temporelles), l'écoulement devenant de plus en plus complexe jusqu'à l'apparition de la turbulence [29]. La transition vers la turbulence est supercritique.

Par ailleurs, dans le régime contra-rotatif pour des nombres de Reynolds  $Re_2$  suffisamment grands, la transition vers la turbulence n'est plus supercritique mais plutôt sous-critique [30, 31]. En effet, les auteurs ont observé des spirales turbulentes intermittentes en dessous de la limite de stabilité prévue par l'analyse linéaire.

En analyse linéaire de stabilité, la transition sous-critique peut être caractérisée par la croissance transitoire, considérée comme un prérequis important à une bifurcation sous-critique et la transition vers la turbulence. La croissance transitoire est une condition suffisante mais pas nécessaire. La notion de mécanisme de croissance transitoire a été introduite par [32]. Elle a été reprise ces dernières décennies par [33-35] avec l'étude de l'influence de la non-normalité de l'opérateur linéaire dans l'analyse linéaire de stabilité des écoulements cisailés.

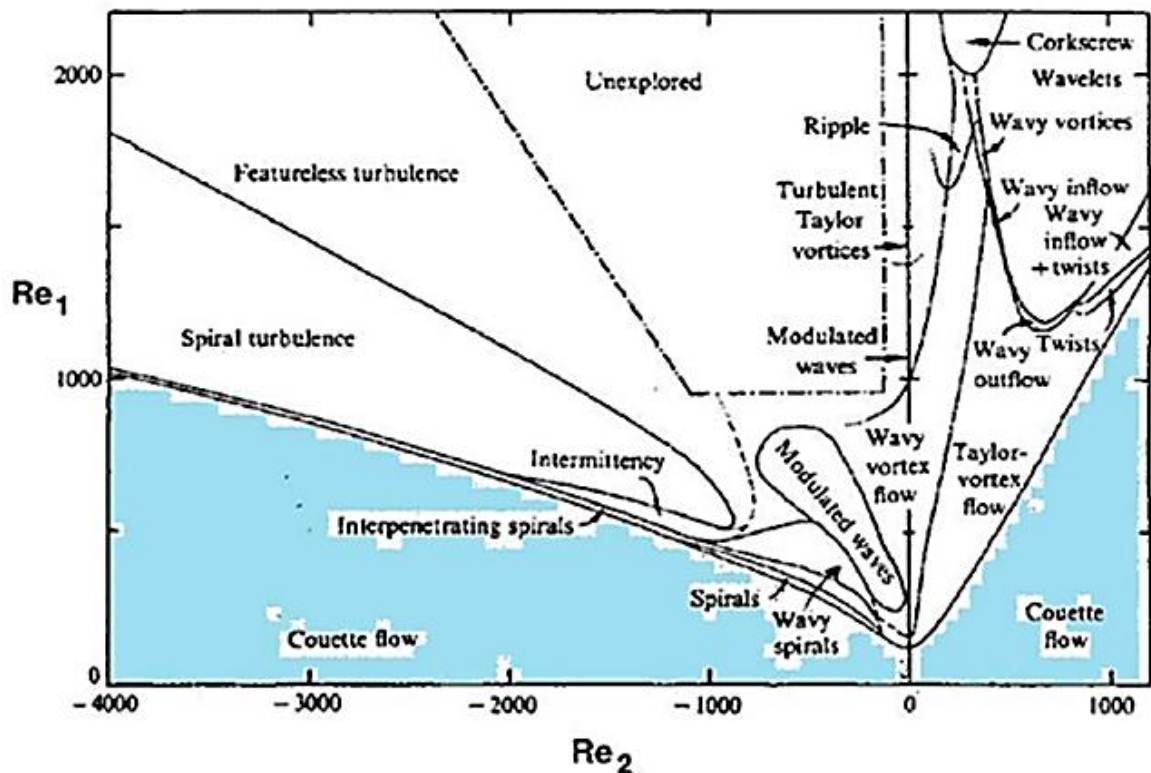


fig. 4.2 – Régimes d'écoulement observés par [29] lorsque les deux cylindres tournent en fonction des valeurs des nombres de Reynolds intérieur  $Re_1$  et extérieur  $Re_2$ , pour un fluide newtonien et un rapport de rayon  $\eta = R_1 / R_2 = 0.883$ .

Dans ce mécanisme, de petites perturbations interagissent avec l'écoulement de base, ce qui produit une augmentation de leur énergie. En effet, malgré la stabilité linéaire de l'écoulement, une croissance suffisamment importante de l'énergie de la perturbation peut déclencher les effets non linéaires qui peuvent maintenir l'énergie cinétique des perturbations non nulle aux temps ultérieurs.

Cette énergie est fortement amplifiée pendant un temps court, inférieur au temps de diffusion visqueuse, avant de décroître sous l'effet de la viscosité. Pour les écoulements ouverts ou fermés, deux mécanismes physiques ont été identifiés pour expliquer la croissance transitoire : le mécanisme de [32] [32, 36] et le mécanisme de lift-up [37, 38].

Le mécanisme de lift-up agit lorsqu'un tourbillon orienté dans la direction axiale se trouve superposé à un écoulement parallèle, près d'une paroi. Le tourbillon transporte du fluide de faible vitesse en l'éloignant de la paroi et pousse du fluide de haute vitesse vers la paroi. Des zones alternées de basse et haute vitesse axiale appelées "streaks" apparaissent alors. On peut montrer d'après les équations aux perturbations linéarisées que des tourbillons axiaux produisent une perturbation de vitesse axiale augmentant proportionnellement avec

le temps, jusqu'à ce que la dissipation visqueuse devienne importante et produise une décroissance de l'énergie de la perturbation.

Le mécanisme de [32] est déclenché par des perturbations formées de tourbillons transverses (de vorticité dans la direction  $z$ ) initialement penchés dans la direction opposée à l'écoulement de base (orienté dans la direction  $x$ ). L'écoulement de base alimente ces perturbations en énergie via le tenseur de Reynolds, ce qui produit un basculement progressif des tourbillons. Lorsque les tourbillons commencent à pencher dans la direction de l'écoulement de base, la dissipation visqueuse l'emporte sur le tenseur de Reynolds et l'énergie des perturbations diminue.

Du point de vue mathématique, la croissance transitoire est associée à la non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire [39]. Cet effet a été souligné pour la première fois par [40] pour le problème de l'écoulement de Taylor-Couette. Les caractéristiques de la croissance transitoire dans l'écoulement de Taylor-Couette ont été étudiées pour la première fois par [41] qui ont calculé le pseudo spectre d'une perturbation axisymétrique, pour une périodicité axiale fixée, avec des cylindres en contra-rotation pure de sorte que l'effet de la force de Coriolis disparaisse. Les auteurs ont montré que la courbure augmente la croissance transitoire. [42] a déterminé pour un rapport de rayon fixé,  $\eta = 0.881$ , les nombres d'ondes axial et azimutal qui donnent la croissance optimale. Son étude a été menée dans la zone linéaire stable pour les cylindres en contra-rotation. Récemment, des calculs de la croissance transitoire couvrant tout le régime linéairement stable de l'écoulement Taylor-Couette ont été effectués par [43]. Pour ce faire, ils ont utilisé de nouveaux paramètres, le nombre de Reynolds de cisaillement et le nombre de rotation, introduit par [44]. Les auteurs ont trouvé que la croissance transitoire dans la zone linéairement stable de l'écoulement de Taylor-Couette évolue en  $Re^{2/3}$  pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ , ce qui suggère que ces effets pourraient être importants à  $Re$   lev .

#### 4.2.2. Instabilité de Rayleigh-Bénard

Au début du XX<sup> me</sup> siècle, Henry Bénard (1901) a réalisé un travail expérimental, sur la convection thermique, qui a marqué son époque. Ce travail a permis d'observer l'apparition des cellules de convection au sein d'un film liquide différentiellement chauffé. Quinze ans plus tard, John Williams Strutt alias Lord Rayleigh (1916) interprète ces rouleaux comme induits par la poussée d'Archimède. Depuis, ce phénomène est connu sous le nom de convection de Rayleigh-Bénard. Le modèle de Rayleigh consiste en une couche horizontale de liquide confinée entre deux plaques parfaitement conductrices, maintenues à deux

températures constantes, avec celle du bas supérieure à celle du haut. Il a en plus considéré l'approximation de Boussinesq qui suppose que la densité est constante sauf dans le terme force de poussée d'Archimède, où elle varie linéairement avec la température.

Pour ce type de configuration, la convection n'apparaît pas tant que la différence de température ne dépasse pas un certain seuil. En effet, au-dessous de cette valeur critique, la solution reste diffusive, car la dissipation visqueuse et la diffusion thermique l'emportent sur les travaux des forces de gravitation qui sont responsables des instabilités convectives [45]. Les travaux réalisés dans ce domaine peuvent être classés en deux catégories. La première concerne les analyses de stabilité linéaire de la solution diffusive, qui mène aux calculs des seuils d'apparition de la convection appelés aussi 'seuils primaires' [46,47], [48,49]. La deuxième catégorie englobe les études de la convection au-delà de son apparition où on analyse les transitions d'écoulements (phénomènes non-linéaires) [50], [51]. Etant donné la littérature abondante sur le sujet, nous allons nous limiter à la configuration qui nous concerne, c'est à dire la configuration cylindrique.

#### 4.2.2.1. Analyse de stabilité linéaire

La première étude des seuils primaires de convection dans les cavités cylindriques chauffées par le bas, est due à [52]. Cette étude a montré que la convection apparaît sous la forme d'un mode axi-symétrique  $m = 0$ , pour les faibles rapports de forme  $A$  ( $A = H/D$ ,  $H$  étant la hauteur du cylindre et  $D$  son diamètre) et sous la forme d'un mode asymétrique  $m = 1$  pour les grandes valeurs de  $A$ . La transition entre ces modes a lieu pour  $A = 0.56$  pour les cavités avec des parois latérales adiabatiques et pour  $A = 0.72$  pour celles avec des parois latérales parfaitement conductrices. En 1983, Buell & Catton [53] ont complété le travail en faisant varier continuellement la conductivité thermique des parois latérales, du cas conducteur au cas isolant. Leurs résultats sont en conformité avec ceux de [52] sauf pour le mode  $m = 1$ , où une différence de 20 %, a été trouvée. Cette différence est expliquée par le choix des fonctions de base qui présentent un point singulier sur l'axe dans le cas de [52]. D'autre part, [54] a considéré des conditions aux limites qui facilitent le calcul analytique des seuils primaires. Il a ainsi montré que la convection apparaît sous forme du mode  $m = 0$  pour les valeurs du rapport de forme  $A$ , comprises entre 0.15 et 0.33, et sous la forme  $m = 2$ , pour  $0.33 < A < 0.45$ , et finalement elle apparaît sous la forme du mode  $m = 1$  pour  $A > 0.45$ .

### 4.2.3. Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est un mouvement ondulatoire en dynamique des fluides qui se forme lorsque deux fluides thermiquement stables sont superposés et se déplacent à des vitesses différentes à leur surface de contact [55].

L'effet a été étudié au XIX<sup>e</sup> siècle par les physiciens Lord Kelvin et Hermann von Helmholtz qui ont montré que la différence de vitesse va engendrer un flot turbulent transversal à la frontière. La théorie peut être appliquée de la même façon à l'intérieur d'un fluide de densité uniforme mais ayant des couches se déplaçant à des vitesses différentes ou des fluides de densités différentes superposés [56].

Cette instabilité joue un rôle important dans de nombreuses situations géophysiques : dans la dynamique de l'atmosphère et des océans, dans le comportement des plasmas, etc. Les structures tourbillonnaires, onde ou lame de Kelvin-Helmholtz, résultant de l'instabilité contribuent de façon significative au transport de quantité de mouvement, de température et de polluants. La compréhension de la génération de ces instabilités permet de mieux les représenter dans les modèles dont la résolution n'est pas suffisante pour permettre de les résoudre explicitement.

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe les croissances vagues. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée "instabilité de Kelvin-Helmholtz"



Fig. 4.3 – Vagues générées par le vent lors d'une tempête [56].

Lorsqu'un fluide lourd est placé au-dessus d'un fluide léger, on observe la croissance de doigts amorçant le mélange des deux fluides. Cette instabilité, due à la gravité, est appelée "instabilité de Rayleigh-Taylor". En l'absence de forçage de la vitesse et lorsque le fluide



lourd est placé sous le fluide léger, une perturbation de l'interface génère des oscillations que l'on appelle "ondes de surface" ou "ondes de gravité externes" ou plus communément "houle linéaire" ou "vagues".

Pour comprendre ces phénomènes d'instabilité ou d'oscillations, pour déterminer leurs taux de croissance et leurs pulsations, le choix d'un modèle pertinent, sa linéarisation autour d'une état d'équilibre et le calcul d'une relation de dispersion généralisée constituent une démarche très courante en physique, bien au-delà de la mécanique des fluides. Cette relation de dispersion généralisée relie le taux de croissance de l'instabilité ou la période de l'oscillation à la longueur d'onde des perturbations et aux différents paramètres du problème étudié.

#### 4.2.3.1. Exemples d'écoulements $U(y)$ de fluide parfait [57]

##### Nappes de vorticité :

La vitesse est constante sauf en des positions  $y_n$  où elle change brusquement. En  $y_n$ , la vorticité est infinie ailleurs elle est nulle. On parle d'une nappe de vorticité [57]

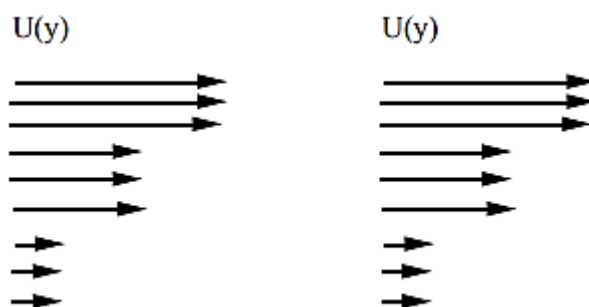


Fig. 4.4 - Nappes de vorticité

##### Saut de vorticité:

Le profil de vitesse est continu mais pas sa dérivée. Par exemple, il est linéaire par morceaux : la vorticité est bornée mais constante par morceaux dans ce cas.

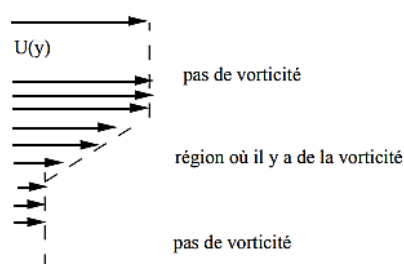


Fig. 4.5- Saut de vorticité

Pourquoi la vorticité se réorganise-t-elle en une allée de vortex? Tel est l'objet de cet exemple.

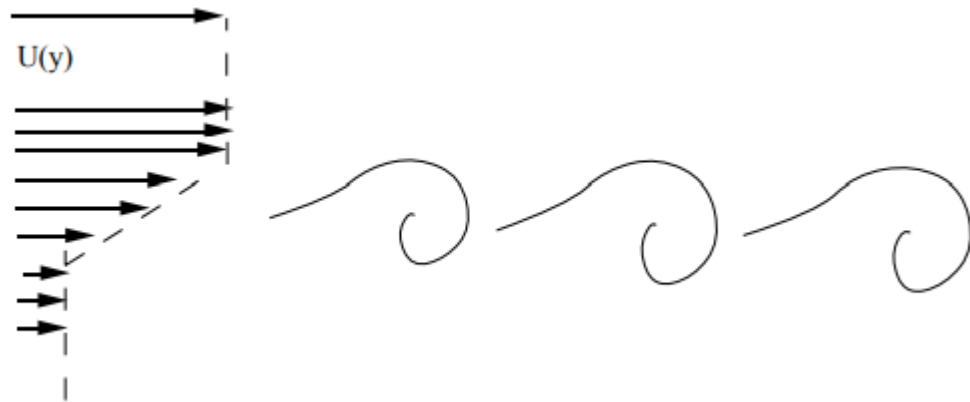


Fig. 4.6- Vortex

#### 4.2.3.1.1. Mise en équations

##### 4.2.3.1.1.1. Hypothèses

Soient deux fluides incompressibles de densité différente, soumis à un champ de pesanteur. Ces deux fluides sont immiscibles : ils ne se mélangent donc pas mais sont séparés par une interface possédant une tension de surface caractérisant leur interaction moléculaire. La tension de surface est constante et notée  $\sigma$ . [57]

Le couplage entre les champs de vitesse/ pression et la forme de l'interface rend ce problème particulièrement complexe. [57]

En plus du cisaillement, plusieurs mécanismes interviennent : la gravité, la tension superficielle, la viscosité.

Dans le cadre linéaire, on peut supposer qu'il n'y a pas de déferlement de l'interface : il est toujours possible de définir l'interface comme une fonction  $y = \eta(x, t)$ . Au-delà d'une certaine amplitude, cette hypothèse est prise en défaut. [57]

##### Hypothèses

- On se place en 2D (pas nécessaire mais simplifie les calculs sans occulter le phénomène prépondérant qui est 2D).
- On néglige la viscosité.

#### 4.2.3.1.1.2. L'état de base de la nappe de vorticité

Consid rions l'état de base suivant une interface plate et deux champs de vitesses uniformes de part et d'autre.

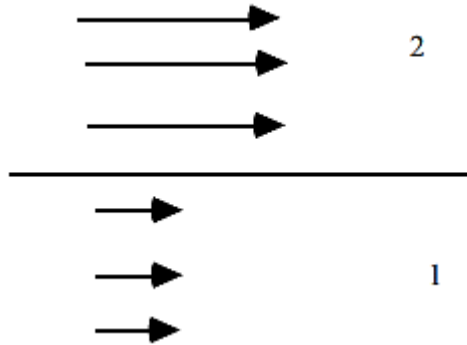


Fig. 4.7- Deux champs de vitesses uniformes

Ceci est un cas limite pour lequel tout le cisaillement est situé à l'interface où se produit le saut de vitesse :

$$u_B = U_1 \text{ en } y < 0, u_B = U_2 \text{ en } y > 0 \quad (4.1)$$

La vorticité de cet écoulement de base est située sur l'interface où elle est singulière.

La pression est constante s'il n'y a pas de gravité. Sinon, on aura simplement un effet hydrostatique pur :

$$p = p_0 - \rho_1 g y \quad y < 0 \text{ et } p = p_0 - \rho_2 g y \quad y > 0 \quad (4.2)$$

L'interface étant plate dans l'état de base, la tension superficielle n'intervient pas explicitement puisqu'elle est associée à une courbure de l'interface. [57]

#### 4.2.3.1.1.3. Les équations du mouvement

Les équations à résoudre sont les équations d'Euler avec les conditions aux limites  $u \geq U_1$  en  $y > -\infty$  et  $u \geq U_2$  en  $y > +\infty$ , et la condition d'incompressibilité. La gravité est prise en compte dans l'équation suivant  $y$ .

Il faut imposer des conditions sur une interface dont la dynamique n'est pas connue à l'avance : c'est la grande difficulté de ce problème. [57]

Condition dynamique :

Le saut de pression est tel que :

$$p_1(x, \eta(x, t), t) - p_2(x, \eta(x, t), t) = \sigma \nabla \cdot n_{12} \quad (4.3)$$

La normale à la surface est :

$$n_{12} = \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) / \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Condition cinématique :

Les fluides ne "décollent" pas de la surface et ne s'interpénètrent pas : intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface :

$$u_1 \cdot n_{12} = u_2 \cdot n_{12} \text{ en } y - \eta(x, t) = 0 \quad (4.5)$$

On retrouve cette même relation à partir de  $\nabla \cdot u = 0$  intégrée sur une petite épaisseur (cf électromagnétisme ! Voir la condition sur la composante normale du champ magnétique  $B$  à une interface !)

Si

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0 \quad (4.6)$$

Est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant matérielle,  $F$  est transporté le long des lignes de courant :

$$\frac{d}{dt} F = 0 \text{ (dérivée totale)} \quad (4.7)$$

Par définition de la dérivée lagrangienne

$$\frac{dy}{dt} = v(x, \eta, t) \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.8)$$

$\frac{d}{dt} F = 0$  S'écrit (en utilisant les vitesses dans le milieu 1 ou 2) :

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + u_i(x, \eta(x, t), t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = v_i(x, \eta(x, t), t) \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4.9)$$

Qu'on peut réécrire en faisant apparaître les vitesses normales

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_i \cdot n_{12} \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

En faisant la différence entre ces deux expressions on retrouve la continuité des vitesses normales. On a en plus une relation nouvelle reliant le déplacement de l'interface et le champ des vitesses.

**N.B.** Il y a des termes non linéaires dans les équations d'Euler mais aussi et surtout dans les équations à l'interface !

#### 4.2.4. Instabilité de Bénard-Marangoni

Les écoulements convectifs dans une couche horizontale de fluide à surface supérieure libre, initialement au repos et soumise à un gradient de température peuvent être produits soit par les forces de flottabilité soit par une variation de la tension superficielle en fonction de la température ou par ces deux effets conjugués. Dans la littérature ces phénomènes sont désignés comme instabilités de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Ces phénomènes sont rencontrés dans les procédés mettant en jeu la croissance des cristaux, ou ceux qui concernent le revêtement par film mince, ainsi que dans les expérimentations des écoulements à faible gravité.

Des études expérimentales sur la convection de Bénard-Marangoni ont été entreprises pour comprendre les mécanismes responsables de ces phénomènes d'instabilité, Koshmeider et al. [58] ont par exemple mis en évidence l'influence de la géométrie du récipient ainsi que le rapport de forme du récipient sur le nombre des cellules convectives obtenues et leurs formes, Rahal et al. [59] ont eu étudié l'influence des nombres de Biot et de Prandtl sur la convection de Bénard-Marangoni dans des petits récipients cylindriques. D'autres travaux numériques ont été élaborés pour étudier ces phénomènes, on citera à titre d'exemples les travaux de Médale et al. [60] et ceux de Kuhlmann et al. [61].

Pour toutes ces études faites concernant cet écoulement plusieurs facteurs tels que la géométrie des cavités et les propriétés physiques du fluide influent sur les motifs des écoulements convectifs et leur distribution.

##### 4.2.4.1. Exemples d'écoulements

L'objectif de cet exemple est de simuler la convection de Bénard-Marangoni dans des récipients cylindriques chauffés par un flux non-uniforme tout en variant les nombres de Biot et de Marangoni et ce, pour un nombre de Prandtl élevé  $Pr = 9000$  et un nombre de Rayleigh faible tel que  $Ra = 1000$ . Le choix de ces valeurs de  $Pr$  et  $Ra$  nous permettra d'étudier la convection dû à l'effet Marangoni dans des fluides très visqueux et au sein desquels le transfert thermique se fait principalement par advection.

##### 4.2.4.1.1. Modèle physique et formulation mathématique

On considère un fluide newtonien incompressible contenu dans un récipient cylindrique ouvert, de rapport de forme  $\Gamma = R/e$ . Les parois latérales sont isolées thermiquement, la surface supérieure est libre et un flux thermique uniforme est imposé sur la partie centrale de la face inférieure comme le montre la figure 4.8. La conduction

thermique dans le substrat de la base crée un gradient thermique dans le fluide, qui va se propager jusqu'à la surface libre. Cela induit des forces thermo capillaires qui donnent naissance à des cellules convectives. La forme de ces cellules dépend des conditions géométriques (rapport de forme) et thermiques ainsi que des nombres de Prandtl, Rayleigh, Biot et Marangoni.

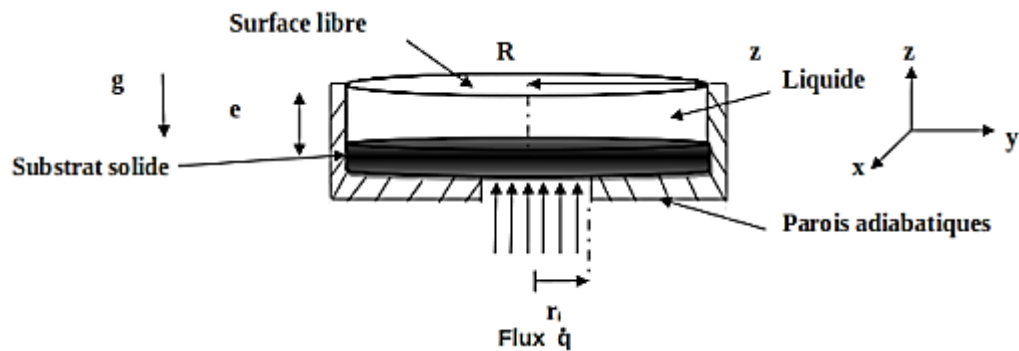


Fig. 4.8 - Schéma du dispositif modélisé physiquement.

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour une formulation plus simple du problème, nous allons considérer quelques approximations. Nous supposons que l'épaisseur de la couche fluide reste constante, et que la surface est maintenue plane. La déformation de la surface libre peut être négligée si on a le nombre de crispation  $C_r \ll 1$  et le nombre de Galillé  $Ga \gg 1$  avec  $C_r = (\rho \nu k_f) / (\gamma e)$  et  $Ga = (g e^3) / (\nu k_f)$  ce qui est le cas pour notre étude, puisque  $C_r = 5 \times 10^{-3}$  et  $Ga = 1,78 \times 10^{10}$ . Il s'agira alors de déterminer la répartition des vitesses et de la température dans le fluide. L'écoulement de convection de Bénard-Marangoni est provoqué par les forces thermocapillaires (effet de la variation de la tension superficielle avec la température). On suppose que les propriétés physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dont la variation au sein du fluide est prise en compte via l'approximation de Boussinesq et pour la tension superficielle qui dépend de la température. Les relations suivantes sont considérées :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (4.11)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial T} T \quad (4.12)$$

Où  $\gamma$  : tension de surface,  $\text{N m}^{-1}$

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionner le problème sont l'épaisseur du film  $e$ , la vitesse de diffusion thermique  $\alpha/e$ , le temps de diffusion  $e^2/\alpha$  et l'écart de température  $\Delta T = \frac{\dot{q}e}{k_f}$ . Le modèle mathématique s'écrit après adimensionnalisation comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + Ra \cdot Pr \cdot \theta \cdot \vec{j} + Pr \cdot \Delta \vec{V} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \theta) = \Delta \theta \quad (4.15)$$

Le fluide est initialement au repos à la température ambiante  $T_0$ . Les vitesses sont nulles le long des parois solides adiabatiques (parois non glissantes). Les conditions aux limites obtenues à l'interface solide/liquide sont :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \quad (4.16)$$

$$V_x = V_y = V_z = 0 \quad (4.17)$$

La condition cinématique à la surface libre doit satisfaire l'équilibre mécanique et en tenant compte de l'imperméabilité de la surface libre on obtient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.19)$$

$$V_z = 0 \quad (4.20)$$

Où :  $Ma$  nombre de Marangoni,  $Ma = \frac{e \Delta T}{\mu \alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial T}$

La condition thermique sur la partie centrale de la paroi du fond soumise à un flux  $\dot{q}$ , s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 1 \text{ pour } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = (0.3)^2 \text{ avec } (r_i = 0.3R) \quad (4.21)$$

La condition aux limites thermique sur la surface libre s'écrit sous forme dimensionnelle :

$$-k_f \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = h(T(x, y, e, t) - T_0) \quad (4.22)$$

Où  $h(T(x, y, e, t) - T_0)$  désigne l'échange convectif entre la surface libre et le milieu ambiant. Cette condition aux limites s'écrit sous forme adimensionnelle :

---

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi \theta = 0 \quad (4.23)$$

Où :  $Bi$  est le nombre de Biot,  $Bi = \frac{h e}{k_f}$