Université de M'sila
Faculté de Technologie
Département de Mécanique

Master I - Génie des Matériaux
Diffusion et transformation de phase

TRAVAUX DIRIGE ET CORRIGÉS

2019 / 2020

EXERCICE

a/ Demontrer les deux lois de Fick

$$J = -D\frac{\partial C}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

b/ Donner la résolution de l'équation caractérisant le deuxième loi de Fick

CORRIGÉ

a/ Voir le support de Cours DTP (Pages 7-10)

b/ Pour résoudre l'équation $\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

on introduisons une inconnue auxiliaire

$$u = x/2\sqrt{Dt}$$

Calculons

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial u}\left(-\frac{u}{2t}\right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{4Dt}$$

et l'équation de Fick donne après remplacement et multiplication des deux membres de l'équation par $4t$:

$$-2u\frac{\partial c}{\partial u} = \frac{\partial^2 c}{\partial u^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)}{\partial u}, \quad \partial\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)\Big/\frac{\partial c}{\partial u} = -2u\,\partial u.$$

Integrons $\ln\frac{\partial c}{\partial u} = -u^2 + cte \qquad \frac{\partial c}{\partial u} = Ae^{-u^2}$

Intégrons de nouveau, u variant de 0 à u:

$$C = A\int_0^u e^{-u}\,du + B$$

Les conditions limites permettent d'écrire :

- t q/q et $x = 0$; $u = 0$, $C = C_0$ d'où $B = C_s$

$t = 0$ et x q/q : $C = C_0$, $u = \infty$ on sait que :

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{on en déduit } A = -2\frac{C_s - C_0}{\sqrt{\pi}}$$

$$C = C_s - 2\frac{(C_s - C_0)}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-u^2}\,du = C_s - (C_s - C_0)\,\theta(u)$$

on trouve les valeurs de $\theta(u)$; appelée fonction erreur (erf) ou Integrale de Gauss

$\frac{\partial c}{\partial u} = -2\frac{C_s - C_0}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2}$ est toujours négatif ; c'est une fonction constamment décroissante de u

$$C = At^{-1/2}\exp(-x^2/4Dt) = At^{-1/2}e^{-u^2}$$

Soit M la quantité de la matière diffusante on peut écrire

$$M = \int_0^\infty c\,dx = At^{-1/2} \cdot \int_0^\infty 2\sqrt{Dt}\,e^{-u^2}\,du = A\sqrt{\pi \cdot D}$$

on peut déduire la valeur de A puis $C = \frac{M}{\sqrt{\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$