Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2020/2021

Cours 05: Lois discrètes usuelles

Une loi de probabilité décrit de manière théorique le caractère aléatoire d'une expérience aléatoire. En pratique, il se trouve beaucoup des expériences aléatoires qui possèdent la même loi de probabilité. Dans ce chapitre, on va présenter les principales lois de probabilité correspondant aux variables aléatoires discrètes. Ces modèles pouvant être retenus dans la modélisation de ces expériences aléatoires.

1- Loi discrète Uniforme.

Une variable aléatoire discrète X suit une *loi uniforme* si elle prend n valeurs $x_1, \ldots, x_n$ et toutes ces valeurs sont équiprobables. C'est à dire lorsque:
- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Pour tout x_i on a $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas, nous avons

$$E[X] = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, V[X] = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (E[X])^2,$$

Exemple 1.
On lance un dé équilibré. Définissons une variable aléatoire X comme suite : "*numéro apparaissant sur le dé*". Alors, X suit une loi uniforme de probabilité $\frac{1}{6}$. Dans ce cas nous avons

$$E[X] = \frac{7}{2}, V[X] = \frac{35}{12}.$$

Exemple 2.
Une urne contient 10 boules numérotée de 1 à 10. On tire une boule. On définit X : " *le nombre de la boule tirée*". Alors, X suit une loi uniforme.

2- Loi de Bernoulli ($\mathcal{B}(p)$).

On considère une expérience aléatoire qui a deux issues possibles: "*succès ou échec*", "*vrai ou faux*", "*marche ou arrêt*", "*pile ou face*", etc. Un succès est représenté par 1 et l'échec par 0. On suppose que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On parle alors de la *loi de Bernoulli* (épreuve de Bernoulli) de paramètre p.

Définition.
On dit que la variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli de paramètre* p, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, *si:*
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

Théorème.
Soit X une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli. Alors,

$$\begin{aligned} E[X] &= p, \\ V[X] &= p(1-p) = pq. \end{aligned}$$

Exemple 1.
Le jeu de Pile et Face. On définit X par

$$\begin{cases} X(\text{Pile}) = 1 \\ X(\text{Face}) = 0 \end{cases}$$

Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'autre part

$$E[X] = \frac{1}{2}, V[X] = \frac{1}{4}.$$

Exemple 2.

Une épreuve consiste à lancer un dé. On gagne si l'on obtient un 6. On définit X par

$$\begin{cases} X(6) = 1 \\ X(k) = 0, \ 1 \le k \le 5 \end{cases}$$

On a donc $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$. C'est à dire, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$. D'autre part

$$E[X] = \frac{1}{6}, V[X] = \frac{5}{36}.$$

Exemple 3.
Une urne contient 10 boules rouges et 20 boules noires. On tire une boule, si elle est rouge on gagne. C'est une éprouve de Bernoulli avec le paramètre $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

3- Loi binomiale ($\mathcal{B}(n,p)$).
On répète maintenant n fois la même épreuve de Bernoulli en supposant que chaque épreuve soit indépendante des autres. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre total de succès. La loi de probabilité de X est appelée *loi binomiale de paramètres* n et p, et notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Définition.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on écrit $X \hookrightarrow B(n,p)$, si:
- $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$.
- Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

avec $q = 1 - p$.
Théorème.

Soit $n \in N$, $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire. On note $q = 1 - p$. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$\begin{aligned} E[X] &= np, \\ V[X] &= npq, \\ \sigma_X &= \sqrt{npq} \end{aligned}$$

Exemple 1.

On lance 3 fois une pièce de monnaie. On définit X comme étant le nombre d'apparition de Pile. Nous avons

x_k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}, \ 0 \leq k \leq 3.$$

Donc, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Exemple 2.

Considérons n tirages avec remise dans une urne qui contient 5 boules rouges et 10 boules noires. On définit X : "*nombre de boules rouges obtenues*". Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{15}\right)$.

Conclusion.

Il faut savoir justifier l'utilisation d'une loi binomiale dans une situation donnée. Pour cela, on vérifiera les points suivants:
- On considère une épreuve de Bernoulli comportant deux issues possibles réussite et échec, de probabilités p et q respectivement.
- On répète n fois cette épreuve et les n réalisations sont indépendantes.
- La variable aléatoire X est égale au nombre de réussites.

4- Loi gémétrique ($\mathcal{G}(p)$).

On considère des épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p. Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance: on s'arrête lorsque le succès est obtenu pour la première fois. Ainsi, on définit la variable aléatoire X comme étant le nombre d'épreuves pour avoir le seccès pour la première fois, dans ce cas X suit la loi gémétrique de paramètre p et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Définition.

On dit que X suit la *loi géométrique de paramètres p* si
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Théorème.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètres p. Alors,

$$E[X] = \frac{1}{p} \text{ et } V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple.

Tirage avec remise dans une urne contenant 5 boules blanches et 10 boules noires. On définit X : 'le nombre de tirage pour avoir une boule blanche pour la première fois'. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ avec } p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

5- Loi Hypergéométrique ($\mathcal{H}(N, n, p)$).

Une urne contient N boules avec deux catégories de boules (blanches et noires, par exemple). On note p est la probabilité de tirer une boule blanche. On tire simultanément n boules et on note X le nombre de boules blanches obtenues, alors X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres N, n et p, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$:

- $X(\Omega) = \begin{cases} \{0, 1, ..., n\} & \text{si } n \leq Np \\ \{0, 1, ..., Np\} & \text{si } n > Np \end{cases}.$
- Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{Np}^{k} \times C_{Nq}^{n-k}}{C_{N}^{n}}, \text{ où } q = 1 - p.$$

Dans ce cas, nous avons:

$$E[X] = np,\ V[X] = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

6- Loi de Poisson ($\mathcal{P}(\lambda)$).

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire. On dit que X suit la *loi de Poisson* de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Dans ce cas, nous avons:

$$E[X] = \lambda, V[X] = \lambda.$$

Remarque.

La loi de Poisson est la loi des événements rares, de petite probabilité. Le paramètre λ représente la moyenne de se produire de l'événement en question dans une période donnée.

Exemple.

La loi de Poisson est utilisée lorsqu'on étudie des phénomènes comme:

- Le nombre de personnes réservant un billet d'avion pour Alger le 6 février.
- Le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps $[0, T]$.
- Le nombre de personnes se présentant à l'arrêt de bus dans un laps de temps défini.
- Le nombre de voitures qui passent à un péage chaque 30 min.
- Le nombre de fautes de frappe par page de cours de maths.