

## 5. Réseau d'antennes

### 1. Introduction

Un réseau d'antennes est constitué d'un ensemble d'antennes identiques et espacées régulièrement. En agissant sur le déphasage de chaque antenne, on peut obtenir des diagrammes de rayonnement très concentrés (directifs) dans la direction choisie.

Le diagramme d'un réseau d'antenne est déterminé par le type de l'élément individuel utilisé, leur orientation, leurs positions dans l'espace et enfin l'amplitude et la phase du courant d'alimentation. Le diagramme de rayonnement résultant est appelé Facteur d'alignement.

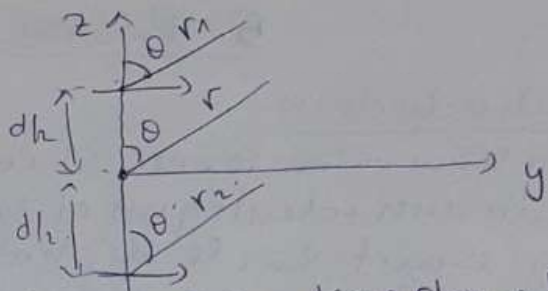
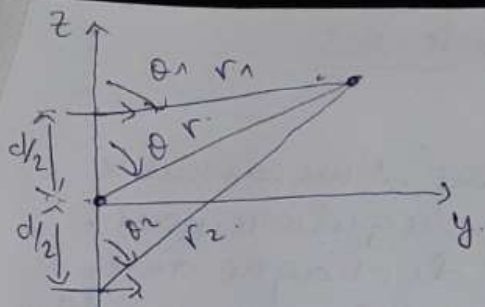
Dans un groupement d'antennes identiques, il y a 5 facteurs de contrôle qui peuvent être utilisés pour obtenir le diagramme de rayonnement voulu.

1. La géométrie générale du réseau (linéaire, planaire, ... etc...)
2. L'espacement relatif entre les éléments.
3. L'amplitude du courant d'alimentation de chaque élément
4. La phase " " " " " " " " " "
5. Le diagramme relatif de ~~chaque~~ éléments individuels

### 2. Groupement de deux antennes:

On considère que le réseau d'antennes est constitué de deux dipôles infinitésimaux horizontaux disposés selon l'axe  $OZ$ . (Fig-1-a).

Le champ total rayonné par les deux éléments est égal à la somme des deux champs rayonnés par chaque élément.



(a) deux dipôles infinitésimaux (b) observations champ lointain

Fig. 1. Géométrie d'un groupement de 2 antennes le long de l'axe oz.

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{a}_\theta j\eta \frac{KI_0 l}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-j[Kr_1 - (\beta/2)]}}{r_1} \cos\theta_1 + \frac{e^{-j[Kr_2 + (\beta/2)]}}{r_2} \cos\theta_2 \right\} \quad (1)$$

où  $\beta$  est la différence de phase du courant d'alimentation entre les deux éléments. En assumant les suppositions du champ lointain suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &\approx \theta_2 \approx \theta \\ r_1 &\approx r - \frac{d}{2} \cos\theta \\ r_2 &\approx r + \frac{d}{2} \cos\theta \\ r_1 &\approx r_2 \approx r \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{variation} \\ \text{de phase} \\ \text{variation d'amplitude} \end{array} \quad (2)$$

L'équation (1) devient :

$$\vec{E}_t = \hat{a}_\theta j\eta \frac{KI_0 l e^{-jKr}}{4\pi r} \cos\theta \left[ e^{+j[Kd\cos\theta + \beta]/2} + e^{-j[Kd\cos\theta + \beta]/2} \right]$$

$$\vec{E}_t = \hat{a}_\theta j\eta \frac{KI_0 l e^{-jKr}}{4\pi r} \cos\theta \left[ 2 \cos\left(\frac{1}{2}[Kd\cos\theta + \beta]\right) \right] \quad (3)$$

Il est clair à partir de l'éq. (3) que le champ total est égal au champ d'un élément seul situé à l'origine multiplié par un facteur (facteur d'alignement - Array Factor). Donc pour le groupement de 2 éléments le facteur d'alignement est :

$$AF = 2 \cos\left[\frac{1}{2}(Kd\cos\theta + \beta)\right] \quad (4)$$

qui peut être donnée sous une forme normalisée :

$$(AF)_n = \cos\left[\frac{1}{2}(Kd\cos\theta + \beta)\right] \quad (5)$$

Le facteur d'alignement est fonction de la géométrie du réseau ( $d$ ) et de l'excitation ( $\beta$ ). Donc en variant la séparation entre les éléments ( $d$ ) et/ou le déphasage ( $\beta$ ) entre les éléments, on peut contrôler les caractéristiques du facteur d'alignement et ainsi le champ total du groupement peut être contrôlé.

$$\vec{E}(\text{total}) = [\vec{E}(\text{élément individuel dans un point de référence})] \times [\text{facteur d'alignement}] \quad (6)$$

Du moment que le facteur d'alignement ne dépend pas des caractéristiques des directions de rayonnement de chaque élément, on peut alors le calculer en remplaçant les antennes par des sources ponctuelles isotropes. Une fois le facteur d'alignement est calculé ainsi, on calcule le champ total en utilisant l'équation (6).

### Exemple

Soit le groupement d'antennes de la Fig. 2.

Trouver les directions de rayonnement nul (les zéros)

pour  $d = \lambda/4$  et (a)  $\beta = 0$ , (b)  $\beta = +\frac{\pi}{2}$ , (c)  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ .

### Solution

(a)  $\beta = 0$ : le champ normalisé est donné par:

$$E_{tn} = \cos \theta \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta \right)$$

les zéros sont obtenus en posant:

$$E_{tn} = \cos \theta \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta \right) \Big|_{\theta = \theta_n} = 0$$

$$\text{soit ; } \cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$$

$$\text{et ; } \cos \left( \frac{\pi}{4} \cos \theta_n \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cos \theta_n = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta_n = 2 \Rightarrow$$

$\theta_n$  n'existe pas. Donc en résumé:  $\theta_n = 90^\circ$ , et il est dû au diagramme de l'élément individuel. Le facteur d'alignement ne contribue, donc, pas aux zéros de rayonnement.

(b)  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ;  $\Rightarrow E_{tn} = \cos \theta \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{n} (\cos \theta + 1) \right] \Rightarrow$   
 Les zéros sont:  $\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$  et,  
 $\cos \left[ \frac{\pi}{n} (\cos \theta + 1) \right] |_{\theta = \theta_n} = 0 \Rightarrow \cos \theta_n + 1 = 2 \Rightarrow$

$\theta_n = 0^\circ$ ; et  $\frac{\pi}{n} (\cos \theta_n + 1) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n$  n'existe pas.  
 Donc, les zéros du groupement sont  $\theta = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$   
 $\theta = 0^\circ$  est introduit par l'alignement des éléments  
 (facteur d'alignement).

(c)  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ;

$E_{tn} = \cos \theta \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{n} (\cos \theta - 1) \right]$ ;

$\cos \theta_n = 0 \Rightarrow \theta_n = 90^\circ$ ;

et  $\cos \left[ \frac{\pi}{n} (\cos \theta_n - 1) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{n} (\cos \theta_n - 1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n$  n'existe pas

et  $\cos \left[ \frac{\pi}{n} (\cos \theta_n - 1) \right] = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_n = 180^\circ$

### 3. Etude d'un réseau uniforme de N éléments

Généralisons maintenant la méthode précédente pour le cas de N éléments (Fig. 2.). Supposons que tous les éléments ont la même amplitude de courant d'alimentation mais chaque élément successif est en avance de phase de  $\beta$  par rapport à l'élément qui le précède.

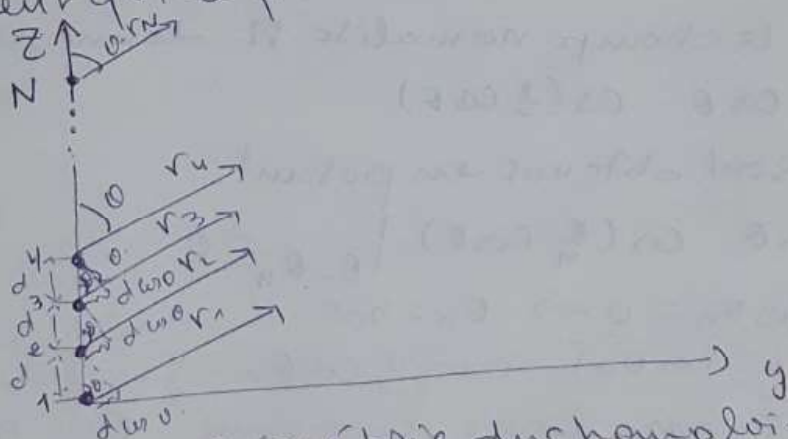


Fig. 2. Géométrie du champ lointain  
 Pour un réseau uniforme de N éléments positionnés  
 le long de l'axe z

Le facteur d'alignement se donnee par:

$$AF = 1 + e^{j(kd \cos \theta + \beta)} + e^{j2(kd \cos \theta + \beta)} + \dots + e^{j(N-1)(kd \cos \theta + \beta)} \quad \Rightarrow$$

$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd \cos \theta + \beta)} \quad \text{--- (7)}$$

qu'on peut écrire:

$$\boxed{AF = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1) \cdot \psi} \quad \text{--- (8)}} \\ \psi = kd \cos \theta + \beta$$

on peut aussi réécrire (8) dans une forme plus compacte en multipliant les deux membres de l'éq. (8) par  $e^{j\psi}$ :

$$(AF)e^{j\psi} = e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} + e^{jN\psi} \quad \text{--- (9)}$$

En faisant (9) - (8) on aura:

$$AF(e^{j\psi} - 1) = (-1 + e^{jN\psi}) \quad \text{--- (10)}$$

alors:

$$AF = \left[ \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} \right] = \frac{e^{j[N/2]\psi}}{e^{j\psi/2}} \left[ \frac{e^{j(N/2)\psi} - e^{-j(N/2)\psi}}{e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} \right]$$

soit:

$$\boxed{AF = e^{j[(N-1)/2]\psi} \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2}\psi)}{\sin(\frac{\psi}{2})} \right]} \quad \text{--- (11)}$$

en module on a:

$$AF = \frac{\sin(\frac{N}{2}\psi)}{\sin(\frac{\psi}{2})} \quad \text{--- (12)}$$

Pour  $\psi$  petit on a:

$$AF \approx \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2}\psi)}{\frac{\psi}{2}} \right] \quad \text{--- (13)}$$

La valeur maximal de (12) ou (13) si  $N \Rightarrow$   
on peut normaliser (12) et (13) par rapport à  $N$   
comme suit:

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \right] \quad (14)$$

$$(AF)_n \approx \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\frac{N}{2}\psi} \quad (15)$$

Pour trouver les zéros du groupement  $\Rightarrow \sin \frac{N}{2}\psi = 0 \Rightarrow$   
 $\frac{N}{2}\psi \Big|_{\theta = \theta_n} = \pm n\pi \Rightarrow$

$$\theta_n = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2n\pi}{N} \right) \right] \quad (16)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$n \neq N, 2N, 3N, \dots$  avec l'équation (14).

En effet, pour  $n = N, 2N, 3N, \dots$  l'éq (14) atteint son maximum, car elle se réduit à la forme  $\sin(0)/0$ . Les valeurs de  $n$  déterminent l'ordre des zéros (premier, second, etc.). Pour que les zéros existent, l'argument de l'arc cosinus ne doit pas excéder l'unité. Donc le nombre des zéros est fonction de l'espacement entre les éléments ( $d$ ) et la phase d'excitation ( $\theta$ ).

Les valeurs max de (14) sont données par:

$$\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta = \theta_m} = \pm m\pi \Rightarrow$$

$$\theta_m = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{kd} \cdot (-\beta \pm 2m\pi) \right] \quad (17)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Le facteur d'alignement de l'équation (15) a un seul maximum pour  $m = 0 \Rightarrow$

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( \frac{-\beta}{2\pi d} \right) \quad (18)$$

qui est l'angle d'observation pour lequel  $\psi = 0$ .

Le point 3-dB provient le facteur d'alignement (15)

SL:

$$\frac{N}{2} \psi = \frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta = \theta_h} = \pm 1,391 \quad \left| \begin{array}{l} \sin c. x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ x = \pm 1,1072 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \theta_h = \cos^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2,782}{N} \right) \right] \quad (19)$$

ou

$$\theta_h = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2,782}{N} \right) \right] \quad (20)$$

Pour des valeurs longues de  $d$  ( $d \gg \lambda$ ) on aura:

$$\theta_h \approx \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2\pi d} \left( -\beta \pm \frac{2,782}{N} \right) \right] \quad (21)$$

L'ouverture à 3-dB,  $\Theta_h$  peut être calculée une fois les angles du 1<sup>er</sup> maximum ( $\theta_m$ ) et ( $\theta_h$ ) sont trouvés. Pour un diagramme symétrique.

$$\Theta_h = 2 |\theta_m - \theta_h| \quad (22)$$

Pour le facteur d'alignement de l'éq. (15), il y a des maximum dus aux lobes secondaires. Ils sont donnés approximativement, quand le numérateur de (15) atteint son maximum.

$$\sin \left( \frac{N}{2} \psi \right) = \sin \left( \frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right) \Big|_{\theta = \theta_s} \approx \pm 1 \Rightarrow$$

$$\frac{N}{2} (kd \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta = \theta_s} \approx \pm \left( \frac{2s+1}{2} \right) \pi \Rightarrow$$

$$\theta_s \approx \cos^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\beta \pm \left( \frac{2s+1}{N} \right) \pi \right] \right\} \quad (23)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

ou encore:

$$\theta_s = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\beta \pm \left( \frac{2s+1}{N} \right) \pi \right] \right\}, s = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Pour  $d \gg \lambda$ :

$$\theta_s \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\beta \pm \left( \frac{2s+1}{N} \right) \pi \right], s = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Le maximum du 1<sup>er</sup> lobe secondaire se donne approximativement par:

$$\frac{N}{2} \psi = \frac{N}{2} (\pi \cos \theta + \beta) \Big|_{\theta = \theta_s} = \pm \frac{3\pi}{2} \quad (26)$$

$$\text{ou } \theta_s = \cos^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ -\theta \pm \frac{3\pi}{N} \right] \right\} \quad (27)$$

en ce point l'amplitude de (15) se réduit à :

$$(AF)_n \approx \left[ \frac{\sin \left( \frac{N}{2} \psi \right)}{\frac{N}{2} \psi} \right]_{\theta = \theta_s} = \frac{2}{3\pi} = 0,212 \quad (28)$$

$$\text{en dB:} \quad (29)$$

$$(AF)_n \approx 20 \log_{10} \left( \frac{2}{3\pi} \right) = -13,46 \text{ dB}$$

Donc le max du 1<sup>er</sup> lobe secondaire de (15) est 13,46 dB  
moins important que le max du lobe principal.

#### 4. Rayonnement transversal d'un réseau

Dans plusieurs applications, on désire avoir maximum de rayonnement selon la direction perpendiculaire à l'axe du réseau (i.e.  $\theta = 90^\circ$  pour la Fig. 1). Pour optimiser la conception, le max de rayonnement de l'élément seul est le même de celui du facteur d'alignement et est dirigée selon  $\theta = 90^\circ$ . Donc on se référant à (14) ou (15), on a le maximum de rayonnement pour :

$$\psi = kd \cos \theta + \beta = 0 \quad (30)$$

Pour avoir le max selon la direction  $\theta = 90^\circ$ , alors :

$$\boxed{\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\theta = 90^\circ} = \beta = 0} \quad (31)$$

Donc une seule condition est nécessaire ; c'est que le déphasage progressive entre les éléments (in amplitude et) et la séparation entre les éléments (d) et quelconque.

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de max dans d'autres directions ( $d \neq n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) avec  $\beta = 0$ .

car, si  $d = n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $\beta = 0$  alors.

$$\psi = kd \cos \theta + \beta \Big|_{\substack{d = n\lambda \\ \beta = 0 \\ n = 1, 2, 3, \dots}} = 2\pi n \cos \theta \Big|_{\theta = 0^\circ, 180^\circ} = \pm 2n\pi \quad (32)$$



Cette valeur de  $\psi$  rend  $d(N) \max$ . Donc pour un alignement uniforme avec  $\beta = 0$  et  $d = nd$ , en outre que le max du facteur d'alignement selon  $\theta = 90^\circ$ , il y a deux autres max selon  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ . Un des objectifs dans plusieurs applications est d'éviter ces maximums multiples. Pour éviter ces max, on prend l'espacement maximal entre les éléments ( $-1 \max < 1$ ).

### 5. Rayonnement longitudinal d'un réseau uniforme

Dans le cas on veut avoir le max de rayonnement selon l'axe de l'alignement du réseau (soit  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$ ). (voir Fig. 1).

Dans le Tableau 1. les expressions qui donnent les zéros, ouverture 3-dB, max des lobes secondaires sont données à partir de (14) et (27).

Zéros	$\theta_n = \cos^{-1} \left( \pm \frac{n}{N} \frac{\lambda}{d} \right)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ $n \neq N, 2N, 3N, \dots$
MAX.	$\theta_m = \cos^{-1} \left( \pm \frac{m}{N} \frac{\lambda}{d} \right)$ $m = 0, 1, 2, \dots$
Points-3-dB	$\theta_h \approx \cos^{-1} \left( \pm \frac{1,3914}{\pi N d} \right)$ $\pi d / \lambda \ll 1$
Max-lobes secondaires	$\theta_s \approx \cos^{-1} \left[ \pm \frac{\lambda}{2d} \left( \frac{2s+1}{N} \right) \right]$ $s = 1, 2, 3, \dots$ $\pi d / \lambda \ll 1$

Tableau 1. Zéros, maximums, Points-3dB et max des Lobes secondaires. Pour un réseau uniforme ~~qui~~ transversal.

\* Un max pour  $\theta = 0^\circ$ :

$$\left| \Psi = kd \cos \theta + \beta \right|_{\theta=0^\circ} = kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -kd \quad (33)$$

\* Un max pour  $\theta = 180^\circ$ :

$$\left| \Psi = kd \cos \theta + \beta \right|_{\theta=180^\circ} = -kd + \beta = 0 \Rightarrow \beta = kd \quad (34)$$

\* Si  $d = \frac{\lambda}{2}$ , le max existe pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$

\* Si  $d = n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , en outre des max pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ , il y a un max pour  $\theta = 90^\circ$ . Donc pour  $d = n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  il y a 4 max, 2 le long de l'axe de référence et 2 le long de la direction  $\perp$  à l'axe de référence. Pour éviter ces max multiples il faut avoir  $d_{\max} < \frac{\lambda}{2}$

Zéros

$$\theta_n = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{n\lambda}{Nd} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = N, 2N, 3N, \dots$$

MAX

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{m\lambda}{d} \right)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Pts. 3-dB

$$\theta_n \approx \cos^{-1} \left( 1 - \frac{1,391\lambda}{\pi d N} \right)$$

$$\pi d / \lambda \ll 1$$

Max. lobes secondaires

$$\theta_s \approx \cos^{-1} \left[ 1 - \frac{(2s+1)\lambda}{2Nd} \right]$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi d / \lambda \ll 1$$

Tableau 2. Zéros, max, points 3-dB et max des lobes secondaires pour un réseau uniforme longitudinal.

## 6. Réseau adaptatif (Phased (Scanning) Array)

(balayage par un faisceau directif).

On a vu précédemment qu'on pouvait changer la direction du lobe principal d'un réseau en contrôlant la phase d'excitation entre les différents éléments.

Donc, il est logique de penser qu'on peut orienter le max de rayonnement dans n'importe quelle direction désirée, pour former ainsi un réseau de balayage (Scanning array).

Assumons qu'on veut avoir un max de rayonnement dans une direction  $\theta_0$  qui varie dans l'intervalle  $(0^\circ \leq \theta_0 \leq 180^\circ)$ .

Pour cela,  $\beta$  doit satisfaire

$$\# \left[ \Psi = kd \cos \theta + \beta \right]_{\theta = \theta_0} = kd \cos \theta_0 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -kd \cos \theta_0 \quad (35)$$

Ainsi en contrôlant  $\beta$ , on peut diriger le lobe principal dans n'importe quelle direction voulue et ainsi on forme un réseau de balayage.

L'ouverture à 3-dB se obtient en utilisant (19) avec  $\beta = -kd \cos \theta_0$ . (En utilisant le signe (-) dans l'argument de (19) pour représenter un angle et le signe (+) pour représenter l'autre). Alors l'ouverture  $\Delta$ :

$$\Theta_h = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2Nd} \left( kd \cos \theta_0 - \frac{2,782}{N} \right) \right] - \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2Nd} \left( kd \cos \theta_0 + \frac{2,782}{N} \right) \right]$$

$$\Theta_h = \cos^{-1} \left( \cos \theta_0 - \frac{2,782}{Nkd} \right) - \cos^{-1} \left( \cos \theta_0 + \frac{2,782}{Nkd} \right) \quad (36)$$

on a:  $N = (L+d)/d$ , où  $L$  est la longueur du réseau  
on aura alors:

$$\left[ \begin{aligned} \Theta_h &= \cos^{-1} \left[ \cos \theta_0 - 0,443 \cdot \frac{1}{L+d} \right] \\ &- \cos^{-1} \left[ \cos \theta_0 + 0,443 \cdot \frac{1}{L+d} \right] \end{aligned} \right] \quad (37)$$

\* Direction de

- Reseau transversal

$$(AF)_n = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2} \cdot kd \cos \theta)}{\sin(\frac{1}{2} kd \cos \theta)} \right] \quad (38)$$

Pour d << λ on a:

$$(AF)_n \approx \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2} kd \cos \theta)}{(\frac{N}{2} kd \cos \theta)} \right] \quad (39)$$

$$U(\theta) = [(AF)_n]^2 = \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2} kd \cos \theta)}{(\frac{N}{2} kd \cos \theta)} \right]^2 = \left[ \frac{\sin(z)}{z} \right]^2 \quad (40)$$

$$z = \frac{N}{2} kd \cos \theta \quad (41)$$

$$U_{max} = 1 \Rightarrow D_0 = \frac{4\pi U_{max}}{Prad} = \frac{U_{max} a^2}{U_0} \Rightarrow$$

$$U_0 = \frac{Prad}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin(z)}{z} \right]^2 \sin \theta d\theta$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin(\frac{N}{2} kd \cos \theta)}{\frac{N}{2} kd \sin \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta$$

$$z = \frac{N}{2} kd \cos \theta \Rightarrow dz = -\frac{N}{2} kd \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$U_0 = -\frac{1}{Nkd} \int_{-Nkd/2}^{+Nkd/2} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{1}{Nkd} \int_{-Nkd/2}^{+Nkd/2} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

Pour un reseau long (Nkd/2 → long), on peut alors écrire

$$U_0 = \frac{1}{Nkd} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

$$\text{on a: } \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi \Rightarrow$$

$$\boxed{U_0 \approx \frac{\pi}{Nkd}} \quad (41)$$

$$\frac{D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} = \frac{Nkd}{\pi} \Rightarrow \boxed{D_0 = 2N(d/\lambda)}} \quad (42)$$

en utilisant:  $L = (N-1)d$  — (43)

$$D_0 \approx 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) \approx 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \cdot \left( \frac{d}{\lambda} \right) \text{ — (44)}$$

Pour  $L \gg d$ , on a:

$$D_0 \approx 2N \left( \frac{d}{\lambda} \right) = 2 \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \cdot \left( \frac{d}{\lambda} \right) \stackrel{L \gg d}{\approx} 2 \left( \frac{L}{\lambda} \right) \text{ — (45)}$$

- Rayonnement longitudinal

Le facteur d'alignement pour  $\theta = 0^\circ$  est:

$$(AF)_n = \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{N \sin \left[ \frac{1}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]} \right] \text{ — (46)}$$

Pour  $d \ll \lambda$

$$(AF)_n \approx \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]} \right] \text{ — (47)}$$

$$U(\theta) = [(AF)_n]^2 = \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1)} \right]^2 = \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \text{ — (48)}$$

$$z = \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \text{ — (49)}$$

$U_{max} = 1$  pour  $\theta = 0^\circ$

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]} \right]^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Soit:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \right]}{\frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1)} \right]^2 \sin \theta d\theta \text{ — (50)}$$

Posez  $z = \frac{N}{2} kd (\cos \theta - 1) \Rightarrow dz = -\frac{N}{2} kd \sin \theta d\theta \Rightarrow$

$$U_0 = \frac{1}{Nkd} \int_0^{\frac{Nkd}{2}} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{1}{Nkd} \int_0^{\frac{Nkd}{2}} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz \text{ — (51)}$$

Pour les très longues longueurs ( $Nkd \rightarrow \text{longue}$ )  $\Rightarrow$

$$U_0 \approx \frac{1}{Nkd} \int_0^{\frac{Nkd}{2}} \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz \approx \frac{1}{Nkd} \int_0^\infty \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz \text{ — (52)}$$

on a:

$$\int_0^\infty \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$U_0 = \frac{\pi}{2Nkd} \quad (53)$$

$$D_0 = \frac{U_{max}}{U_0} \approx \frac{2Nkd}{\pi} = 4N\left(\frac{d}{\lambda}\right) \quad (54)$$

ou encore:

$$D_0 \approx 4N\left(\frac{d}{\lambda}\right) = 4\left(1 + \frac{L}{d}\right)\left(\frac{d}{\lambda}\right) \quad (55)$$

Pour  $L \gg d$

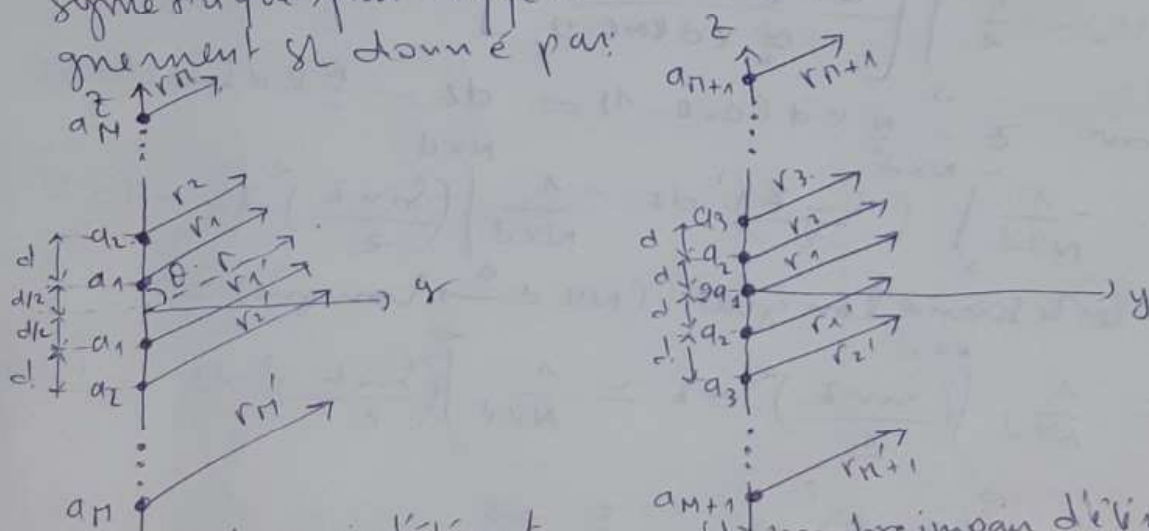
$$D_0 \approx 4\left(1 + \frac{L}{d}\right)\left(\frac{d}{\lambda}\right) \stackrel{L \gg d}{\approx} 4\left(\frac{L}{\lambda}\right) \quad (56)$$

### 7. Réseau Linéaire de N éléments uniformément espacés avec amplitude de courant non uniforme

Dans ce cas on considère un groupement d'antennes linéaire d'espacement uniforme mais d'amplitude de courant non uniforme et un déphasage nul entre les différents éléments.

#### Facteur d'alignement

Un réseau de nombre pair d'éléments isotropes  $2\pi/\pi\lambda$  (entière) et positionné symétriquement le long de l'axe  $Oz$ . Comme montré sur la Fig. 3. La séparation entre les éléments est  $d$  et  $M$  éléments sont placés en chaque côté de l'origine. En assumant l'amplitude des courants symétrique par rapport à l'origine, le facteur d'alignement est donné par:



(a) nombre pair d'éléments

(b) nombre impair d'éléments

Fig. 3. Réseau linéaire à amplitude non-uniforme

$$\begin{aligned}
 (AF)_{2n} &= a_1 e^{+j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{+j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &+ a_n e^{+j[(2n-1)/2]kd \cos \theta} \\
 &+ a_1 e^{-j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{-j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &+ a_n e^{-j[(2n-1)/2]kd \cos \theta}
 \end{aligned}$$

$$(AF)_{2n} = 2 \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \quad (57)$$

En normalisant (57) on aura:

$$(AF)_{2n} = \sum_{n=1}^M a_n \cdot \cos \left[ \frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \quad (58)$$

où les  $a_n$  sont les coefficients d'excitation des éléments du réseau.

Si le nombre d'éléments est impair ( $2n+1$ ) (ou  $n$  éléments) (Fig. 3-b) le facteur d'alignement s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 (AF)_{2n+1} &= 2a_1 + a_2 e^{+jkd \cos \theta} + a_3 e^{+j2kd \cos \theta} + \dots + a_{n+1} e^{+jnkd \cos \theta} \\
 &+ a_2 e^{-jkd \cos \theta} + a_3 e^{-j2kd \cos \theta} + \dots + a_{n+1} e^{-jnkd \cos \theta}
 \end{aligned}$$

$$(AF)_{2n+1} = 2 \sum_{n=1}^{n+1} a_n \cos[(n-1)kd \cos \theta] \quad (59)$$

En normalisant (59) on aura:

$$(AF)_{2n+1} = \sum_{n=1}^{n+1} a_n \cdot \cos[(n-1)kd \cos \theta] \quad (60)$$

On peut résumer les résultats précédents comme suit:

$$\begin{aligned}
 (AF)_{2n} \text{ (Pair)} &= \sum_{n=1}^M a_n \cos[(2n-1)u] \\
 (AF)_{2n+1} \text{ (Impair)} &= \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos[2(n-1)u] \quad (61) \\
 u &= \frac{nd}{T} \cos \theta
 \end{aligned}$$

L'étape suivante est consacrée à la détermination des coefficients d'excitation  $a_n$ .

## Réseau binomial

Pour déterminer les coefficients  $a_n$  de l'excitation pour un réseau binomial, Stone a développé la fonction  $(1+x)^{m-1}$  en série, en utilisant le développement binomial.

$$(1+x)^{m-1} = 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} x^3 + \dots \quad (62)$$

Les coefficients positifs pour différentes valeurs de  $m$  sont:

$$m = 1$$

$$m = 2$$

$$m = 3$$

$$m = 4$$

$$m = 5$$

$$m = 6$$

$$m = 7$$

$$m = 8$$

$$m = 9$$

$$m = 10$$

	1	8	28	56	70	56	28	8		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

$$m = 1$$

$$m = 2$$

$$m = 3$$

$$m = 4$$

$$m = 5$$

$$m = 6$$

$$m = 7$$

$$m = 8$$

$$m = 9$$

$$m = 10$$

										1									
										1		1							
										1	2	1							
										1	3	3	1						
										1	4	6	4	1					
										1	5	10	10	5	1				
										1	6	15	20	15	6	1			
										1	7	21	35	35	21	7	1		
										1	8	28	56	70	56	28	8	1	
										1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Fig. u. Triangle de Pascal.

Ce dernier s'appelle triangle de Pascal. Si  $m$  est utilisé pour représenter le nombre des éléments d'un réseau, donc les coefficients représentent les amplitudes relatives des éléments.



A partir de (61) et (63), les coefficients pour les réseaux suivants sont:

1. Deux éléments ( $2n=2$ )

$$a_1 = 2$$

2. Trois éléments ( $2n+1=3$ )

$$2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

3. Quatre éléments ( $2n=4$ )

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 1$$

4. Cinq éléments ( $2n+1=5$ )

$$2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 1$$

### Réseau de Dolph-Chebyshev

Un autre réseau qui se rencontre dans plusieurs cas pratiques, c'est le réseau de Dolph-Chebyshev.

La méthode a été introduite par Dolph, c'est un compromis entre le réseau uniforme et binomial, elle se caractérise par un diagramme dont la puissance des lobes secondaires est très faible par rapport au lobe principal (le lobe binomial, par le lobe secondaire).

### Facteur d'alignement

Le facteur d'alignement d'un réseau contenant un nombre pair ou impair d'éléments est la somme de  $M$  ou  $(M+1)$  termes cosinus. L'harmonique le plus grand de ces termes = nombre d'éléments - 1. On peut alors, écrire chaque terme cosinus, dont l'argument est un entier fois une fréquence fondamentale  $\omega$ , comme une série de fonctions cosinus dont l'argument est la fréquence fondamentale.

$$m=0 \quad \cos(mu) = 1$$

$$m=1 \quad \cos(mu) = \cos u$$

$$m=2 \quad \cos(mu) = \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

$$m=3 \quad \cos(mu) = \cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u$$

$$m=4 \quad \cos(mu) = \cos(4u) = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1$$

$$m=5 \quad \cos(mu) = \cos(5u) = 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u \quad (64)$$

$$m=6 \quad \cos(mu) = \cos(6u) = 32\cos^6 u - 48\cos^4 u + 18\cos^2 u - 1$$

$$m=7 \quad \cos(mu) = \cos(7u) = 64\cos^7 u - 112\cos^5 u + 56\cos^3 u - 7\cos u$$

$$m=8 \quad \cos(mu) = \cos(8u) = 128\cos^8 u - 256\cos^6 u + 160\cos^4 u - 32\cos^2 u + 1$$

$$m=9 \quad \cos(mu) = \cos(9u) = 256\cos^9 u - 576\cos^7 u + 432\cos^5 u - 120\cos^3 u + 9\cos u$$

Ces équations sont obtenues en utilisant la formule d'Euler :

$$[e^{ju}]^m = (\cos u + j\sin u)^m = e^{jmu} = \cos(mu) + j\sin(mu) \quad (65)$$

et  $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ .

Posons  $z = \cos u$  (66)

l'équation (64) s'écrit alors :

$$m=0 \quad \cos(mu) = 1 = T_0(z)$$

$$m=1 \quad \cos(mu) = z = T_1(z)$$

$$m=2 \quad \cos(mu) = 2z^2 - 1 = T_2(z)$$

$$m=3 \quad \cos(mu) = 4z^3 - 3z = T_3(z)$$

$$m=4 \quad \cos(mu) = 8z^4 - 8z^2 + 1 = T_4(z)$$

$$m=5 \quad \cos(mu) = 16z^5 - 20z^3 + 5z = T_5(z)$$

$$m=6 \quad \cos(mu) = 32z^6 - 48z^4 + 18z^2 - 1 = T_6(z)$$

$$m=7 \quad \cos(mu) = 64z^7 - 112z^5 + 56z^3 - 7z = T_7(z)$$

$$m=8 \quad \cos(mu) = 128z^8 - 256z^6 + 160z^4 - 32z^2 + 1 = T_8(z)$$

$$m=9 \quad \cos(mu) = 256z^9 - 576z^7 + 432z^5 - 120z^3 + 9z = T_9(z)$$

Les polynômes de la forme  $T_m(z)$  sont appelés polynômes de Chebyshev. Les relations entre les fonctions cosinus et les polynômes de Chebyshev sont valides seulement dans l'intervalle  $-1 \leq z \leq +1$ . Et du moment que  $|\cos(mu)| \leq 1$  chaque polynôme  $T_m(z)$  est  $|T_m(z)| \leq 1$  pour  $-1 \leq z \leq +1$ . Pour  $|z| > 1$  les polynômes de Chebyshev sont reliés aux fonctions cosinus hyperboliques.

On donne la formule récurrente qui donne le polynôme de Chebyshev.

$$T_m(z) = 2zT_{m-1}(z) - T_{m-2}(z) \quad (68)$$

Chaque polynôme peut être aussi calculé par:

$$T_m(z) = \cos[m \cos^{-1}(z)] \quad -1 \leq z \leq +1 \quad (69)$$

$$T_m(z) = \cosh[m \operatorname{arsh}^{-1}(z)] \quad z < -1, z > +1$$

Dans la (Figure 5) les six premiers polynômes de Chebyshev sont représentés. On constate les propriétés suivantes:

1. Tous les polynômes passent par le point (1, 1).
2. Dans l'intervalle  $-1 \leq z \leq +1$ , les polynômes ont des valeurs entre  $-1$  et  $+1$ .
3. Tous les racines se situent dans  $-1 \leq z \leq +1$  et tous les maximums ont les valeurs  $+1$  et  $-1$  respectivement.

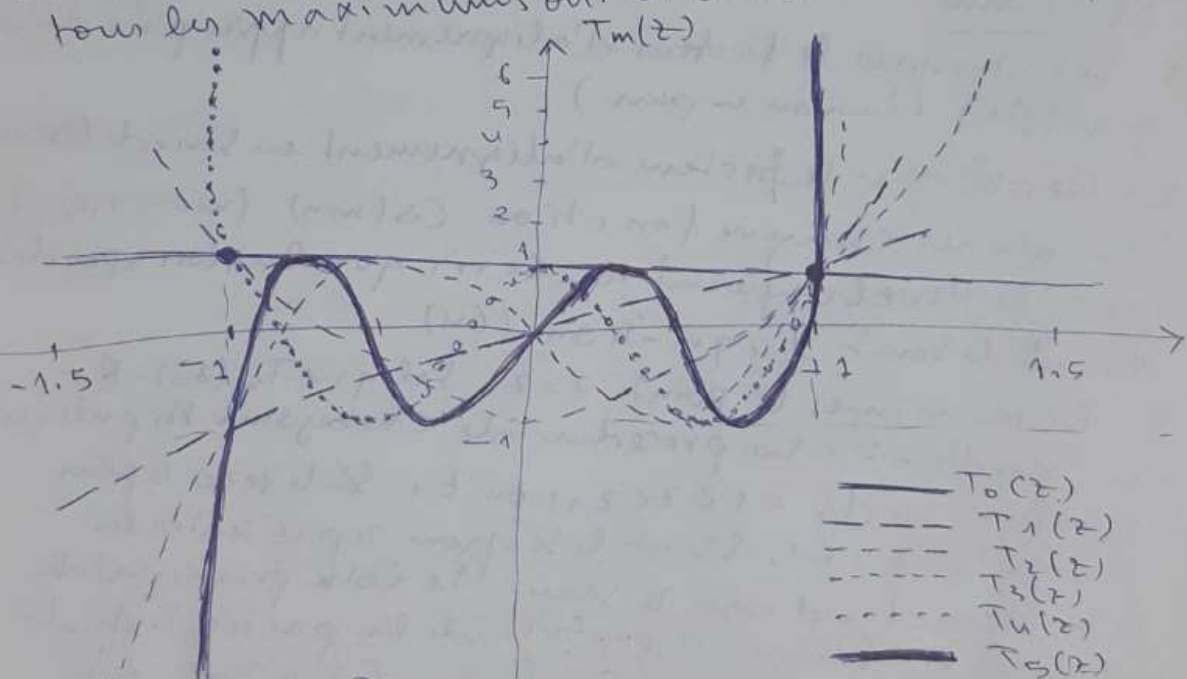


Fig. 5. Polynômes de Chebyshev.  $T_0(z) - T_5(z)$

maintenant pour déterminer les coefficients des courants d'excitation des éléments du réseau, on identifie la série des fonctions cosinus qui donne l'expression du facteur d'alignement avec le polynôme de Chebyshev correspondant.

Remarque: l'ordre du polynôme de Chebyshev = nombre d'éléments du réseau - 1.

### Conception du réseau (Array-Design)

On veut concevoir un réseau de Balph-Chebyshev de  $2N$  ou  $2N+1$  éléments, avec un espacement entre les éléments  $d$ . Les lobes secondaires sont  $R_0$  dB en dessous du maximum du lobe principal. La conception consiste à trouver les coefficients des courants d'alimentation, et ensuite de calculer le facteur d'alignement.

La procédure consiste en les étapes suivantes:

#### Procédure

1. Sélectionner le facteur d'alignement approprié donné par (61) (Pair ou impair)
2. Développer le facteur d'alignement en série de cosinus Remplacer chaque fonction  $\cos(m\psi)$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) par le développement en série qui lui correspond, en utilisant l'équation (64).
3. Déterminer le point  $z=z_0$  tel que  $T_m(z_0) = R_0$ .  $m = \text{nombre d'éléments} - 1$ . La procédure de Chebyshev stipule que le polynôme de  $-1 \leq z \leq z_1$  où  $z_1$  est le zéro le plus proche de  $z=+1$ , et utilisé pour représenter les lobes secondaires du réseau. Le lobe principal du réseau a forme à partir de la partie restante du polynôme jusqu'au point  $z_0$  ( $z_1 \leq z \leq z_0$ )

4. Substituer  $\cos(u) = \frac{z}{z_0} - (70)$

dans le facteur d'alignement de l'étape 2.  
 $\cos u$  n'a plus le  $z/z_0$ , et non plus  $b$ , tel que (70)  
Soit  $L$  valide pour  $|z| \leq |z_0|$ .

5. Identifier le facteur d'alignement de l'étape 2,  
après substitution de (70), à  $T_m(z)$  de (67). Correspo-

ndant.

6. Écrire le facteur d'alignement en utilisant les  
coefficients trouvés en 5.