Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2020/2021

Cours 4: Variables aléatoires continues et Inégalités de probabilités

Commençons par cet exemple: Soit X une variable aléatoire prenant une valeur aléatoire entre 0 et 1. L'ensemble de valeurs de X est l'intervalle $[0,1]$. Toutes les valeurs de $[0,1]$ ont la même probabilité d'être obtenues. Si on veut calculer la probabilité de tomber sur le nombre $\frac{1}{2}$, on trouve que

$$\mathbb{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)=0,$$

car comme il y a une infinité de nombres entre 0 et 1, ils se partagent une probabilité de $\frac{1}{2}$ en une infinité de possibilités. D'autre part, la probabilité de tomber sur un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$,

$$\mathbb{P}\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

puisque la partie $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ répresente la moitié de l'intervalle $[0,1]$. On peut remarquer aussi que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(0<X<\frac{1}{2}\right)+\mathbb{P}\left(X=0\right)+\mathbb{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(0<X<\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

On définie la fonction de répartition de X comme dans le cas discret

$$\forall x\in\mathbb{R}: F\left(x\right)=\mathbb{P}\left(X\leq x\right).$$

Remarquons que

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(a\leq X\leq b\right) &= \mathbb{P}\left(X\leq b\right)-\mathbb{P}\left(X\leq a\right)\\ &= F\left(b\right)-F\left(a\right).\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) \\
&= 1 \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) &= F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une fonction intégrable f qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx.$$

Cette fonction f sera appelée la *densité* de la variable aléatoire X. Dans notre exemple, on a

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ partout ailleur} \end{cases}$$

La fonction f possède les deux propriétés: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$.

On introduit maitenant la définition d'une variable aléatoire continue.

Définition.

Une variable aléatoire X est dite continue si elle prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple.

- La variable aléatoire X qui correspond au temps d'attente à une caisse.
- La variable aléatoire X qui correspond à la taille d'un individu.
- La variable aléatoire X qui correspond à la durée de vie d'une ampoule.
- La variable aléatoire X qui correspond à la durée du vol entre Alger et Paris...

Fonction de répartition.

Soit X une variable aléatoire continue, on appelle fonction de répartition de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Propriétés.

La définition nous permet d'écrire:

1) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$.
2) $F_X(x)$ est continue à droite.
3) $F_X(x)$ est comprise entre 0 et 1, c'est dire

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

4) $F_X(x)$ est une fonction croissante de, c'est-à-dire

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

5) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
6) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$.
7) $\mathbb{P}(X > b) = 1 - \mathbb{P}(X \leq b) = 1 - F_X(b)$.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire continue, alors
1) Pour tout $a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = a) = 0$.
2) $\mathbb{P}(X > b) = \mathbb{P}(X \leq b)$,
3) $\mathbb{P}(a < X) = \mathbb{P}(a \leq X)$,
4) $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Densité et loi de probabilité.

Soit X une variable aléatoire continue. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. On dit que f est une densité de X si:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

2) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque.

Dans le cas des variables aléatoires continues on ne s'intéresse qu'à la probabilité que le résultat x tombe dans un intervalle $[a, b]$, c'est à dire on s'intéresse à calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$

Pour cette raison la fonction densité joue un rôle important dans le cas continu.

Proposition.

Dans le cas où F_X est dérivable, on a pour tout x de $\mathbb{R}$

$$F'_X(x) = f(x).$$

Exemple.

1) La fonction suivante est une densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2) La même pour la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) Aussi pour

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Espérance et variance.

Soit X une variable aléatoire continue et f_X sa densité.
1) L'espérance mathématique de X est donné par la relation

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

2) La variance de X est donnée par la relation

$$V[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\, dx$$

3) L'écart-type est donné par

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]}.$$

Proposition.

Soit X une variable aléatoire continue, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
1) $E[aX + b] = aE[X] + b$.
2) $V[aX + b] = a^2 V[X]$.
3) $\sigma_X[aX + b] = |a|\sigma_X[X]$.
4) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
5) $E[X - Y] = E[X] - E[Y]$.

Exemple 1.

On choisit un nombre au hasard entre et 0 et 4 .
1) Quelle est la loi de X, claculer F_X.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \text{ si} & x > 4 \end{cases}$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entre $0,5$ et $0,7$?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre π?

Exemple 2.

La durée de vie moyenne d'un appareil électronique est 4000 heurs.
1) Quelle est la loi de X et Trouver le paramètre a.
2) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1000 heures au maximum ?
3) En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1000 heures.
4) Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2000 heures ?
5) Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Inégalité en probabilité.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs positives admettant une espérance $E[X]$. Pour tout réel $a>0$ on a

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Preuve.

On définie la variable aléatoire Y

$$Y(x)=\begin{cases} a \text{ si } X(x) \geq a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'inégalité $Y \leq X$ implique l'inégalité

$$E[Y] \leq E[X].$$

Remarquons que

$$Y = a\chi_{\{X \geq a\}},$$

où $\chi_{\{X \geq a\}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{X \geq a\}$. Alors

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[a\chi_{\{X \geq a\}}\right] \\ &= aE\left[\chi_{\{X \geq a\}}\right] \\ &= a\mathbb{P}(X \geq a). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité annoncée.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire continue avec $E[X]$ est l'espérance de X et $V[X]$ est la variance de X. Pour tout $\varepsilon>0$ on a

$$\mathbb{P}(|X-E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V[X]}{\varepsilon^2}.$$

Preuve.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Z=(X-E[X])^2$, qui est positive et admet une espérance par hypothèse. Pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\mathbb{P}(|X-E[X]| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Z \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[Z]}{\varepsilon^2} \text{ avec } E[Z]=V[X].$$

Inégalité de Jensen

On rappelle qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y).$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$.

L'inégalité de Jensen: Soient φ une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire à valeurs dans I, dont l'espérance $E[\varphi(X)]$ existe. Alors,

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$$