Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2020/2021

Cours 06: Lois d'une variable aléatoire continue

1-Loi uniforme.

Soit X une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans $[a,b]$. Si la probabilité que la valeur x tombe dans un intervalle de longueur fixée reste la même quelque soit cet intervalle inclus dans $[a,b]$, on perle donc d'une variable aléatoire qui suit le *loi uniforme*, et sa fonction de densité $f(x)$ est constante sur l'intervalle $[a,b]$.
On dit que X suit une *loi uniforme* sur l'intervalle $[a,b]$ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Dans ce cas, nous avons

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \text{ et } V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple.

On choisit un nombre au hasard entre et 0 et 4. La densité f est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de X, claculer F_X,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \text{ si} & x \geq 4 \end{cases}.$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entre $0,5$ et $0,7$?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre π?

2- Loi exponentielle.

Elle est souvent utilisée pour les questions de fiabilité (ex: duré de vie de circuits électroniques).
Soit $a > 0$, on dit que X suit une *loi exponentielle* de paramètre a si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$. Dans ce cas, nous avons

$$E[X] = \frac{1}{a} \text{ et } V[X] = \frac{1}{a^2}.$$

Exemple.

La durée de vie moyenne d'un appareil électronique est 4000 heurs.
1) Quelle est la loi de X et Trouver le paramètre a.
2) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1000 heures au maximum ?
3) En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1000 heures.
4) Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2000 heures ?
5) Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

3- **Loi normale.**

On dit que X suit une loi Normale centrée et réduite si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Dans ce cas, nous avons

$$E[X] = 0 \text{ et } V[X] = 1.$$