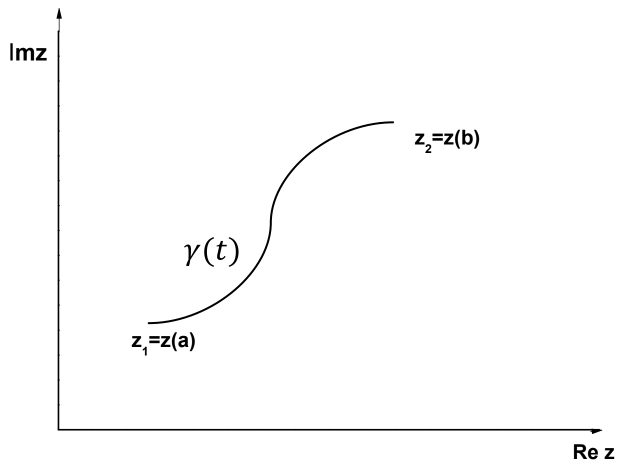
CHAPITRE 3 : Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

3.1 Intégrale curviligne

Définition 1 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un chemin γ est une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

$$[a, b] \longrightarrow \Omega$$
$$\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$$



- Lorsque t décrit $[a, b]$, le point $\gamma(t)$décrit une trajectoire $\gamma([a, b]$ dans le plan $\mathbb{C}$.

$\gamma(a)$ est appelé l'origine du chemin et $\gamma(b)$ son extrémité.

- On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même, c'est-à -dire il n'a pas de points doubles.

Exemples :

- Si le chemin γ est un segment de droite d'origine le point a et d'extrémité le point b alors
$$z = \gamma(t) = a + (b - a)t \quad et \qquad 0 \leq t \leq 1$$
- Si le chemin γ est un cercle de centre z_0 et de rayon r alors :
$$z = \gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad et \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Définition 2 : On appelle contour ou lacet un chemin fermé, c'est-à -dire que son origine se confond avec son extrémité, et vérifie $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.2 Intégration le long d'un chemin

Définition 3: On appelle intégrale de f le long d'un chemin γ le nombre complexe :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Propriétés :

- Si γ^* désigne le chemin opposé de , c'est-à –dire orienté de b vers a alors :

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

- Si f est telle que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \gamma([a,b])$ alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz \leq \int_{\gamma} |f(z)|.|dz| \leq M\int_{\gamma} |dz| = ML$$

L : est la longueur du chemin $\gamma(L = \int_{\gamma} |dz|)$

- Si γest la juxtaposition de deux chemins $\gamma_1$et γ_2 alors :

$$\int_{\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Si le chemin est fermé et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif) on note $\oint_{\gamma} f(z)dz$.

Exemple : calculer $\int_{\gamma} dz$, où γ est le triangle joignant $1+i, 1-i\ et -1+i$

Soit $I = \int_{\gamma} dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz$

Avec : γ_1 est le segment de droite $1+i$ à $1-i$

$$\Rightarrow z = \gamma_1(t) = 1 + i - 2it\ et\ \gamma_1' = -2idt \quad \Rightarrow I_1 = \int_{\gamma_1} dz = \int_0^1 -2idt = -2i$$

Et γ_2 est le segment de droite $1-i$ à $-1+i$

$$\Rightarrow z = \gamma_2(t) = 1 - i + 2(i-1)t\ et\ \gamma_1' = 2(i-1)dt$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\gamma_2} dz = \int_0^1 2(i-1)dt = 2(i-1)$$

Et γ_3 est le segment de droite $-1+i$ à $1+i$

$$\Rightarrow z = \gamma_3(t) = -1 + i + 2t\ et\ \gamma_1' = 2dt$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_{\gamma_3} dz = \int_0^1 2dt = 2$$

Donc par conséquent $I = \int_{\gamma} \, dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz = -2i + 2i - 2 + 2 = 0$

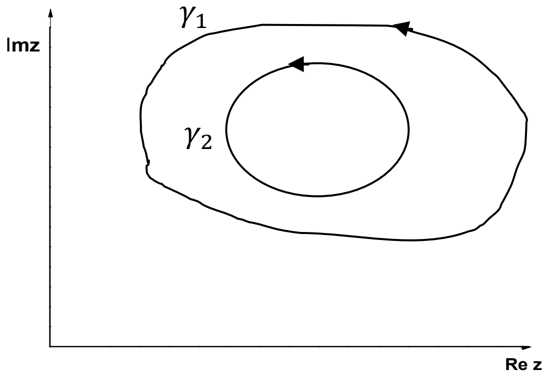
3.3 Théorème de Cauchy

Soit γ une courbe simple fermée. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine Ω limité par la courbe γ et sur la courbe γ, alors on a le théorème de Cauchy :

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\, dz = \oint_{\gamma} f(z) dz = 0}$$

Proposition :

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur et sur la frontière limité par deux courbes fermées γ_1 et γ_2, alors on a : $\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0$



3.4 Formules intégrales de Cauchy

<u>Théorème 1 :</u> Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine Ω limité par la courbe γ et sur la courbe γ, et si z_0 est un point intérieure au domaine, alors :

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \text{(I)}}$$

Où γ est parcourue dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Démonstration : posons

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & si\ z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si\ z = z_0 \end{cases}$$

$f(z)$ est holomorphe dans γ d'où $g(z)$ est holomorphe dans γ, alors :

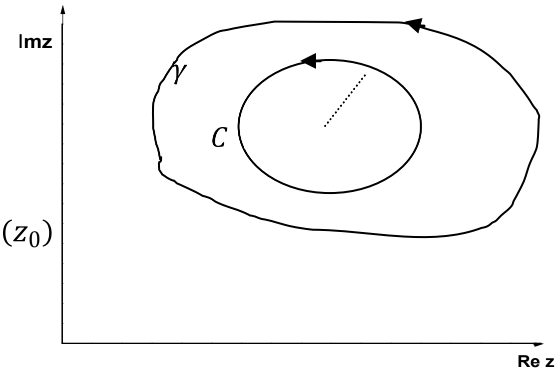
$$\int_{\gamma} g(z)\,dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

Pour calculer l'intégrale $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$, on suppose un cercle C de rayon r et de centre z_0 à l'intérieure de γ

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \oint_{C} \frac{dz}{z-z_0}$$

Avec $z - z_0 = re^{it}$ $t \in [0,2\pi]$

$$\oint_{C} \frac{dz}{z-z_0} = \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 2\pi i \Longrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$



Théorème 2 :

Par la suite de la relation (I), la dérivée nième de $f(z)$ au point z_0 est donnée par ne, alors :

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad \text{(II)}}$$

On appelle ces deux relations (I) et (II) les formules intégrales de Cauchy.

Exemples :Calculer $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz$ où C est le cercle définie comme :

1) $|z-2| = 2$
2) $|z-4| = 1$

Solution :

1) Pour le cercle $|z-2| = 2$, on $z_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{\pi}{2} - 2\right| < 2 \Rightarrow z_0$ est à l'intérieure de C , donc on utilise la formule intégrale Cauchy $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz = 2\pi i f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \sin\frac{\pi}{2} = 2\pi i$ $(f(z) = \sin z \; est\ holomorphe)$.

2) Pour le cercle $|z-4|=1$, on $z_0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{\pi}{2}-4\right|>1 \Rightarrow z_0$ est à l'extérieur de , donc $\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ est holomorphe dans C, alors on utilise le théorème de Cauchy $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\, dz = 0$

3.5 Séries Entières

3.5.1 Définition : On appelle série entière en $\mathrm{z}-\mathrm{z}_0$, d'une variable complexe z, une série de la forme suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^\mathrm{n}$peut définir un nombre complexe z par la d

3.5.2 Rayon de convergence : On définit le rayon de convergence de la série entière, comme le nombre R tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^\mathrm{n}$ converge si $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|<R$ et diverge si $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|>R$. Pour $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|=R$ la série peut être convergé ou divergé.

On peut obtenir le rayon de convergence par : • Le critère de d'Alembert :$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ • Le critère de Cauchy : $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}}$

Remarque : Les deux propositions précédentes sont basées sur l'existence des limites. Mais si ces limites n'existent pas cela ne signifie pas que le rayon de convergence n'existera pas, dans ce cas on fait appel à d'autres critères de convergence des séries.

Notation : On note $D(z_0$,R)= $\{z \in \mathbb{C}\ tel\ que\ |z-z_0|<R,\ R>0\}$

$D(z_0$,R) est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon R.

$\bar{D}(z_0$,R) $=\{z \in \mathbb{C}\ tel\ que\ |z-z_0|\le R,\ R>0\}$

$\bar{D}(z_0$,R) est appelé disque fermé de centre z_0 et de rayon R

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^\mathrm{n}}{2^\mathrm{n}}$

On a : $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{\mathrm{n}+1}}{2^\mathrm{n}}\right|=2$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^\mathrm{n}}{2^\mathrm{n}}$ converge pour $|z-i|<2$, qui représente le disque de centre (0.1) et de rayon $R=2$.

Pour $|z-i|=2 \Rightarrow z-i=2e^{i\theta}$ ⇒la série devienne $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}$. C'est une série divergente car :

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty} e^{in\theta}=+\infty \neq 0$$

La série converge dans le disque ouvert de centre $i(0,1)$ et de rayon 2.

3.5.3 Propriétés des séries entières :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ une série entière de rayon de convergence $R(\neq 0)$, *alors* :

- Elle est dérivable dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du disque de convergence, et sa dérivé est $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{na_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n-1}}$
- Elle peut être intégrée terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du disque de convergence.

3.3.4 Développement d'une fonction en séries entières

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant le disque $D(z_0, R)$ et f une fonction holomorphe $f: D \longrightarrow C$. On dit que f admet un développement en série entière au voisinage de z_0 si et seulement si il existe une suite de coefficients complexes $(a_n)n \in N$ telle que : $\forall z \in |z-z_0| < R \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$.

On dit aussi que f est analytique en z_0.

Propriétés :

- Soit $f : D \subset C \rightarrow C$ développable en série entière sur D. Alors f est indéfiniment dérivable et pour tout $n \in N, f^{(n)}(z_0)$ existe et $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
- Si le développement en série entière de f existe, il est unique.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ est appelée la série de Taylor de f en z_0.

3.5.5 Développement de quelques fonctions usuelles :

- $\forall z \in \mathbb{C} : \; e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{z^n}}{n!}$
- $\forall z \in \mathbb{C} : \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{z^{2n+1}}}{(2n+1)!}$
- $\forall z \in \mathbb{C} : \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{z^{2n}}}{(2n)!}$
- $|z| < 1 : \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{z^n}$
- $|z| < 1 : \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{z^n}$

3.6 Prolongement analytiques

Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z-1}$ définie pour $z \neq 1$. Cette fonction, holomorphe au voisinage de tout point $z \neq 1$, dans $C\backslash\{1\}$. Et Soit

$$g(z) = \sum_{n\geq 1} z^n$$

qui définit une fonction holomorphe dans le disque D de centre 0 et de rayon 1. Pour $|z| < 1, g(z) = f(z)$. On dit alors que $f(z)$ est le prolongement analytique dans $C\backslash\{1\}$ de la fonction $g(z)$. Plus généralement, si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert U du plan complexe et $g(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert V du plan complexe, telles que l'intersection de U et de V ne soit pas vide, et que

$$f(z) = g(z) \text{ , pour tout } z \in U \cap V$$

alors, $g(z)$ est le prolongement analytique de $f(z)$ dans $V - (U \cap V)$. De même, $f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans $U - (U \cap V)$.

3.7 Points Singuliers

Un point singulier d'une fonction f est une valeur de z pour laquelle $f(z)$ n'est pas holomorphe.

Si $f(z)$ est holomorphe partout dans un domaine excepté en un point intérieur z_0, on dit que $z = z_0$ est un point singulier isolé, ou une singularité isolée de $f(z)$. Il y en a de différents types de singularité.

Exemple : si $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ alors $z = 1$ est un point singulier isolé de $f(z)$.

3.7.1 Pôles

Si $f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$ avec $\Phi(z_0) \neq 0$, où $\Phi(z)$est holomorphe partout dans un domaine contenant $z = z_0$,et si n est un entier positif , alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n.

- Si $n = 1$ le pôle est souvent appelé un pôle simple.
- Si $n = 2$ le pôle est appelé un pôle double, etc...

Exemples :

1. La fonction $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ a deux singularités : un pôle d'ordre 2 (double) en $z_1 = 2$, et un pôle simple en $z_2 = -1$
2. La fonction $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+1} = \frac{2z+1}{(z+i)(z-i)}$ a deux pôles simples en $z_1 = i \; et \; en \; z_2 = -i$

3.7.2 Singularité apparente

On dit que le point $z_0$est une singularité apparente (ou bien une fausse singularité) si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.

Exemple : la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ a une fausse singularité en $z_0 = 0$; puisque $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

3.7.3 Singularité essentielle : Si $f\,(z)$ est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle.

Exemple : la fonction $f(z) = e^{1/z}$ a un point singulier essentielle en $z = 0$

3.8 Série de Laurent

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe en tout point à l'intérieur et sur un cercle (γ)de centre z_0, sauf en un point $z = z_0$, où elle possède un pôle en ce point, alors $[(z - z_0)^n f(z)]$ est analytique en tout point à l'intérieur et sur un cercle (γ)et possède un développement en série de Taylor autour de $z = z_0$, de sorte que :

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots\cdots\cdots$$

Cette série s'appelle la série de Laurent de $f(z)$

La partie $(a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots\cdots\cdots)$ s'appelle ***la parie analytique*** de la série de Laurent, et le reste de la série constitué de puissance négatives en $(z - z_0)$:

$$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}$$

S'appelle ***la partie Principale.***

En générale on appelle une série de Laurent une série de puissance positive et négative ; telle que :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$$

Remarque : la série de Laurent d'une fonction $f(z)$, permet l'identification de type de singularité situé en $z = z_0$, alors si :

- La partie principale a un nombre infini de termes, alors $z = z_0$ est dit un point singulier essentiel
- La partie principale a un nombre fini de termes, et que $a_{-n} \neq 0$ tandis que $(a_{-n-1} = a_{-n-2} = 0)$ alors le point singulier $z = z_0$ est un pôle d'ordre n.

Exemples :

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \underbrace{1}_{partie\ analytique} + \underbrace{\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots}_{partie\ pricipale}$ la partie principale est infinie alors la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a un point singulier essentiel en $z_0 = 0$

2. $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ en $z_0 = 1$; on pose $z - 1 = t \Longrightarrow z = 1 + t$

$$g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{t+1}}{t^2} = \frac{e}{t^2}e^t = \frac{e}{t^2}\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{e}{t^2} + \frac{e}{t} + \frac{e}{2!} + \frac{et}{3!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)}}_{Partie\ principale} + \underbrace{\frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \cdots}_{Partie\ analytique}$$

La partie principale est finie $(a_{-3} = 0)$ alors la fonction $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ a un pôle double en $z_0 = 1$

3. $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ (a deux pôles simples en $z_1 = 0\ et\ z_2 = -1$);

- en $z_1 = 0$; on a $\frac{1}{z+1} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots$

$$h(z) = \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{Partieprincipale} \quad \underbrace{-1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \cdots}_{Partie\ analytique}$$

La partie principale est finie $(a_{-2} = 0)$ alors la fonction $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a un pôle simple en $z_1 = 0$

- en $z_2 = -1$

on pose $z + 1 = t \Longrightarrow z = t - 1$

$h(z) = \frac{1}{t(t-1)}$ et on a $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots \Longrightarrow h(t) = -\frac{1}{t}[1 + t +$ $t2+t3+t4+\ldots$

$$= -\frac{1}{t} - 1 - t - t^2 - t^3 - t^4 + \cdots$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{(z+1)}}_{Partieprincipale} \quad \underbrace{-1 - (z+1) - (z+1)^2 - (z+1)^3 \ldots \ldots}_{Partie\ analytique}.$$

La partie principale est finie $(a_{-2} = 0)$ alors la fonction $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a un pôle simple en $z_2 = -1$