Chapitre 4

Transformation de Fourier

Dans tout ce qui suit, on désigner pat $x \cdot \xi$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i.$$

4.1 Transformation de Fourier de fonctions

Définition 12. *Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformation de Fourier de f l'application*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x \cdot \xi} \mathrm{d}x,$$

et transformation de Fourier inverse, l'application

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x \cdot \xi} \mathrm{d}\xi.$$

Théorème 7. (i) *L'application $\mathcal{F}$ est linéaire.*
(ii) $\mathcal{F}(f \otimes g) = \mathcal{F}f \otimes \mathcal{F}g$.
(iii) $\mathcal{F}^{-1}(\overline{f}) = (\overline{\mathcal{F}f})$.

Preuve . Évident. $\square$

Exemple 9. *Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi |x|^2}$, $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi |x|^2 - 2\mathrm{i}\pi x \cdot \xi} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi (x+\mathrm{i}\xi)^2 - \pi \xi^2} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\pi \xi^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi (x+\mathrm{i}\xi)^2} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

considérons la fonction $z \to \mathrm{e}^{-\pi z^2}$

$$\Big(\int_{-b}^{b} + \int_{b}^{b+\mathrm{i}\xi} + \int_{b+\mathrm{i}\xi}^{-b+\mathrm{i}\xi} + \int_{-b+\mathrm{i}\xi}^{-b}\Big)\mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z = 0$$

or

$$\Big|\int_{b}^{b+\mathrm{i}\xi} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z\Big| = \Big|\mathrm{i}\int_{0}^{\xi} \mathrm{e}^{-\pi(b^2-y^2)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}by}\mathrm{d}y\Big|$$
$$\leq |\xi|\mathrm{e}^{-\pi(b^2-\xi^2)} \to 0, \quad \textit{quand} \quad b \to +\infty,$$

de même

$$\Big|\int_{-b+\mathrm{i}\xi}^{-b} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z\Big| \to 0, \quad \textit{quand} \quad b \to +\infty.$$

Il vient alors

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{b+\mathrm{i}\xi}^{-b+\mathrm{i}\xi} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z,$$

i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1;$$

de même si $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$ *avec* $x \in \mathbb{R}^n$.
Un calcule analogue donne $\mathcal{F}^{-1}f(x) = f(x)$ *; il suffit d'appliquer le fait :*

$$f = \bigotimes_{i=1}^{n} f_i, \quad f_i \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f} = \bigotimes_{i=1}^{n} \widehat{f}_i.$$

Propriétés

a) Produit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

En effet, la fonction $(x, \xi) \to f(x)g(\xi)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors par Fubini on a le résultat.

b) Translation et multiplication :

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi\cdot a}\widehat{f}, \quad \mathcal{F}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi_0\cdot x}) = \widehat{f}(\xi - \xi_0).$$

et

$$\mathcal{F}(h_\lambda(f)) = \frac{1}{|\xi|^n}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

c) Dérivation par rapport à x :

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\mathrm{i}\pi\xi)^m\widehat{f}, \quad (\text{dans } \mathbb{R}).$$

En effet par récurrence, pour $m = 1$:

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \Big[f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi\cdot x}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + 2\mathrm{i}\pi\xi\cdot\widehat{f},$$

comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$.

Théorème 8.

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

En effet, d'après (c), on a

$$\Big|\widehat{f}(\xi)\Big| \leq \frac{1}{2\pi|\xi|^m}\Big|\mathcal{F}(f^{(m)})(\xi)\Big|,$$

i.e.,

$$\Big|\widehat{f}(\xi)\Big| \leq \frac{\|f^{(m)}\|_1}{2\pi|\xi|^m} \to 0 \quad \text{quand} \quad |\xi| \to \infty.$$

d) Dérivation par rapport à ξ :

$$\mathcal{F}\Big((-2\mathrm{i}\pi x)^m f(x)\Big) = \Big(\widehat{f}\Big)^{(m)}(\xi).$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-2\mathrm{i}\pi x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

e) Convolution :

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\cdot\widehat{g}.$$

En effet, si f et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}g(x-u)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}u \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi u\cdot\xi}f(u)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi y\cdot\xi}g(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}u \\
&= \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

f) Formule de Parseval-Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \mathcal{F}(f\cdot\overline{g})|_{\xi=0} = \left[\widehat{f}(\xi) * \overline{\widehat{g}(-\xi)}\right]_{\xi=0}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{g}(u-\xi)}\mathrm{d}u|_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{g}(u)}\mathrm{d}u.$$

Il suffit de prendre $f = g$.

4.2 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 13. "$\mathcal{S}(\mathbb{R})$"

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad |x|^\alpha |\varphi^{(\beta)}(x)| \leq c\}.$$

Une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *si* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, *la suite* $\left(x^\alpha \varphi_k^{(\beta)}(x)\right)_k$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 9. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ on peut toujours calculer transformation de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 14. "$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$"
On appelle distribution à croissance lente ou tempérée toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Définition 15. *Soit* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *on appelle transformation de Fourier de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *définie par*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

de même

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Théorème 9. *La transformation de Fourier se prolonge par définition sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve . Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p = 1$ ou $p = 2$), il vient d'après la définition précédante

$$\langle f, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{f}, \varphi\rangle.$$

Si $p = 2$, il suffit d'appliquer la formule de Parseval-Plancherel, i.e.,

$$\langle f, \overline{\psi}\rangle = \langle \widehat{f}, \overline{\mathcal{F}\psi}\rangle.$$

□

a) Distribution à support compact :
Si T est une distribution à support compact, alors

$$\widehat{T} = \langle T, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi\cdot x}\rangle.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T}, \varphi\rangle &= \langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T_\xi, \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x\rangle \\
&= \langle T_\xi, \langle \varphi_x, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\rangle\rangle = \langle T_\xi \cdot \varphi_x, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\rangle \\
&= \langle \varphi_x, \langle T_\xi, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\rangle\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\langle T_\xi, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\cdot\xi}\rangle\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{T}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

b) Translation et dérivation :

$$\mathcal{F}\Big(T(x-a)\Big) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi\cdot a}\cdot\widehat{T}_\xi,$$

et

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial_x}T\Big) = 2\mathrm{i}\pi\xi\cdot\widehat{T}_\xi.$$

4.3 Exemples

1. $\mathcal{F}(1) = \delta$, car
$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \varphi(0).$$
2. $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi_0\cdot x}) = \delta_{\xi-\xi_0}$.
$\mathcal{F}(\cos 2\pi\xi_0 x) = \frac{1}{2}[\delta_{\xi-\xi_0} + \delta_{\xi+\xi_0}]$.
$\mathcal{F}(\sin 2\pi\xi_0 x) = \frac{1}{2}[\delta_{\xi-\xi_0} - \delta_{\xi+\xi_0}]$.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}\Big(\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = -2\mathrm{i}\pi\delta$. En effet, $x\cdot\mathrm{pv}\frac{1}{x} = 1$ et par Fourier on a
$$\mathcal{F}\Big(x\cdot\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = \delta,$$
de plus
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}\Big(\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = -2\mathrm{i}\pi\mathcal{F}\Big(x\cdot\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big),$$
donc, il vient :
$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = -2\mathrm{i}\pi H(\xi) + c^{\mathrm{te}} \quad (\text{car} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}H(\xi) = \delta_\xi).$$
Comme $\mathrm{pv}\frac{1}{x}$ est impaire, donc sa transformée de Fourier et impaire :
$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = -2\mathrm{i}\pi H(\xi) + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi(1-2H(\xi)) = -\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}\xi.$$
4. $\mathcal{F}(\delta) = 1$.

4.4 Exercices

1.
(i) Calculer $\widehat{f}$ où $f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour} \quad |x| > \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{pour} \quad |x| < \frac{1}{2}, \end{cases}$
(ii) En déduire :
 (a) $\mathcal{F}\Big(H\Big(\frac{x-a/2}{a}\Big)\Big)$.
 (b) $\mathcal{F}(xH)$.
 (c) $\mathcal{F}(H * H)$.
 (d) $\mathcal{F}\Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)$.
2.
(i) Calculer $\widehat{f}$ où $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}, \alpha > 0$.
(ii) En déduire :
 (a) $\mathcal{F}\Big(e^{-\alpha|x|}\Big)$.
 (b) $\mathcal{F}\Big(H(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha x}\Big)$.
(iii) Montrer que la solusion de l'equation

$$xT(x) = 0,$$

 est $T(x) = a\delta(x)$.
 (a) Calculer $\mathcal{F}T$ où $T = \mathrm{pv}\frac{1}{x}$.
 (b) En déduire $\mathcal{F}H$, $\mathcal{F}^{-1}H$.
(**Sol.** $x\mathrm{pv}\frac{1}{x} = 1$ donc

$$\mathcal{F}\Big(x\mathrm{pv}\frac{1}{x}\Big) = \widehat{1} = \delta \Rightarrow T = -2i\pi H + c.$$

T impaire $\Rightarrow \widehat{T}$ impaire $\Rightarrow -2i\pi H + c = -c \Rightarrow c = i\pi \Rightarrow \widehat{T} = \begin{cases} -i\pi, & \text{si} \quad \xi > 0, \\ i\pi, & \text{si} \quad \xi < 0, \end{cases}$
$\check{T} = \mathcal{F}\widehat{T} = -2i\pi\widehat{H} + \mathcal{F}(i\pi) \Rightarrow \widehat{H} = \frac{-1}{2i\pi}T + \frac{1}{2}\delta$. T impaire $\Rightarrow \check{T} = T \Rightarrow \widehat{H} = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{x}$.)

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ homogène d'ordre $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t > 0,\, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle T, \varphi(t\cdot)\rangle = t^{-n-\lambda}\langle T, \varphi\rangle.$$

Démontrer que si T homogène d'ordre λ alors $\widehat{T}$ homogène d'ordre $-n-\lambda$.
4.
(a) Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montre que : si $f * g = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$
(b) Si $f = g$.
(c) $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$: $T * S = 0 \Rightarrow T = 0$ ou $S = 0$.
Sol. • $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$, $\varphi \cdot \psi = 0$, on pose $f = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ et $g = \mathcal{F}^{-1}\psi$ alors

$$\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g = \mathcal{F}(f * g) = 0 \Rightarrow f * g = 0,$$

et

$$f * f = 0 \Rightarrow \widehat{f}^2 = 0 \Rightarrow \widehat{f} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

• $T = 1$, $S = \delta'$ alors $1 * \delta' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} 1 * \delta = 0$.

5.

(a) $f(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big)$ Cauchy-Riemann : calculer $\overline{\partial} f$.

Sol. (a) $|f(x + \mathrm{i}y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ car

$$\int_{|x|\leq A} \frac{1}{|x|}\mathrm{d}x = \int_0^A t^{2-1}t^{-1}\mathrm{d}t < \infty.$$

(b)

$$\langle \overline{\partial} f, \varphi\rangle = -\langle f, \overline{\partial}\varphi\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+\mathrm{i}y}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

par coordonnées polaires où $\widetilde{\varphi}(r\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \overline{\partial} f, \varphi\rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{r}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta}\Big)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi\Big(\int_0^\infty \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial r}\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

et puisque $\widetilde{\varphi}(0,\theta) = \varphi(0,0)$, $\widetilde{\varphi}(r,\theta)$ est 2π-période, alors

$$\langle \overline{\partial} f, \varphi\rangle = -\frac{1}{2}2\pi(-\varphi(0,0)) = \pi\varphi(0,0) = \langle \pi\delta, \varphi\rangle.$$

6. Soit $T_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $z = x + \mathrm{i}y$.

(a) Caluler $\widehat{T}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Montrer que $\widehat{\frac{1}{z}}(\mu) = \frac{-\mathrm{i}}{\mu}$ où $\mu = \xi + \mathrm{i}\eta$ (utiliser l'exo.3).

Sol. (a) Si $n = 0$, $T_0 = 1$ alors $\widehat{T_0} = \delta$.

Si $n = 1$, $T_1 = x + \mathrm{i}y$ alors $\widehat{T_1} = \widehat{x} + \mathrm{i}\widehat{y}$ or

$$\begin{cases} \widehat{xS}(\xi) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{S}, \\ \widehat{yS}(\eta) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\frac{\partial}{\partial\eta}\widehat{S}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\widehat{T_1} = \widehat{x\cdot 1}(\xi) + \mathrm{i}\widehat{y\cdot 1}(\eta) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{\partial\delta}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\Big),$$

i.e.,

$$\widehat{T_1} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\delta_{\xi+\mathrm{i}\eta=0}.$$

Si $n \geq 1$, $T_n = T_1 \dots T_1$ alors

$$\begin{aligned}\widehat{T_n} &= (\mathcal{F}T_1) * \dots * (\mathcal{F}T_1) = \Big(-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big)^n \Big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)^n \delta * \delta \dots * \delta \\ &= \Big(-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big)^n \Big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)^n \delta.\end{aligned}$$

(b) $T = \frac{1}{z}$: $zT = 1$ alors $\widehat{zT} = \widehat{1} = \delta_{\mu=\xi+\mathrm{i}\eta=0}$, ce qui donne

$$\widehat{zT} = \widehat{xT} + \mathrm{i}\widehat{yT} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{\partial\widehat{T}}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial\widehat{T}}{\partial\eta}\Big) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\widehat{T} = \delta.$$

Maintenant, $S = \widehat{T} = ...$, tel que

$$-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)S = \delta.$$

− Solution particulier :

$$S_0 = \frac{-\mathrm{i}}{\mu} = \frac{-\mathrm{i}}{\xi + \mathrm{i}\eta},$$

car d'après l'exo.2.
− Solution générale :

$$S = \mathcal{F}\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{-\mathrm{i}}{\mu} + F(\mu),$$

et

$$T(\lambda z) = \lambda^{-1}\frac{1}{z} = T(z) : \widehat{T(\lambda z)}(\mu) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z} T(\lambda z)\mathrm{d}z,$$

donc si $\lambda \to 0$ on a $F(\mu) = 0$.