Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020-2021

Module : **Transformations intégrales dans les espaces L^p**

(Série d'exercices N° 2)

N.B. On a $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x.\xi} f(x)dx$.

Exercice n°1 :

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte : $\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$.

2) En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

a)$\pi(\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a}),\ a > 0$, b) $x\pi(x)$, c) $\Lambda(x) = \pi(x) \star \pi(x)$, d) $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Exercice n°2 :

a) Calculer la la transformée de Fourier de la fonction porte : $\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$.

b) Meme question pour la fonction de triangle : $\Delta(x) = \begin{cases} 1-|x| & si \quad |x| < 1 \\ 0 \quad si & |x| \geq 1 \end{cases}$.

c) Exprimer $\Delta'(x)$ à l'aide de $\pi(x)$.

d) En utilisant la relation obtenue dans c), retrouver le résultat de b).

Exercice n°3 :

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f_a(x) = e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x)$ et $\varphi_k(x) = \frac{x^k}{k!} f_a(x)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

1) Calculer $\mathcal{F}(f_a)$ et en déduire $\mathcal{F}(\varphi_k)$, $\mathcal{F}()$

2) Soit la fonction g_a définie par $g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$. Déterminer $\mathcal{F}(g_a)$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}dx$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

Exercice n°4 :

1) En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe aucun élément $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \star f = f$.

2) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution, $f \star f = f$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$

1) Vérifier que f est la solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \tag{1}$$

2) En appliquant la transformée de Fourier a (1), montrer que $\widehat{f}(\xi)$ est une solution d'une équation différentielle $\widehat{(1)}$ du premier ordre qu'on déterminera.

3) Résoudre $\widehat{(1)}$ et déterminer $\widehat{f}(\xi)$, sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$.

Exercice n°6 :

Soient f et g deux fonctions absolument et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction de corrélation $\varphi_{fg}(x)$ de $f(x)$ et $g(x)$ est définie par

$$\varphi_{fg}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x+y)dy$$

1) Montrer que : $\varphi_{fg}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi)e^{2\pi ix.\xi}d\xi$

2) En déduire l'identité de Parseval : $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$

3) Calculer la transformée de Fourier de la fonction : $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

4) Déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.