Notes de cours des systèmes asservis du 1ier ordre

Système du 1er ordre (1)

- Système régi par l'équation différentielle

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

- Fonction de transfert

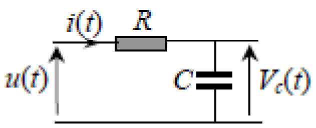
$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad \Rightarrow \quad sT\,Y(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{1 + Ts}}$$

T : constante de temps
K : gain statique
Pôle : $\lambda = -\frac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

- Exemple

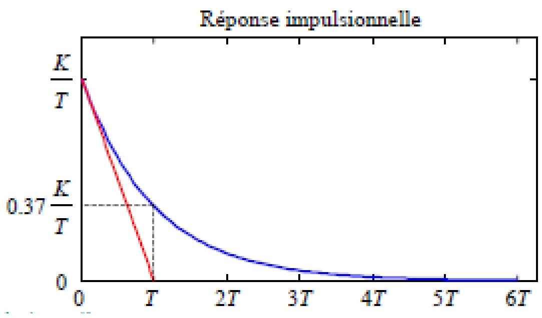


$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad \text{avec} \quad y(t) = V_c(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad \text{avec} \quad T = RC$$

- Réponse impulsionnelle
  - Entrée : $u(t) = \delta(t)$
  - Réponse du système : $h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
  - Tangente à l'origine : $x(t) = -\frac{K}{T^2}t + \frac{K}{T}$ $\left(\text{Pente} = -\frac{K}{T^2}\right)$

La tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = T$



0	T	$2T$	$3T$
$h_0 = \frac{K}{T}$	$0.37\ h_0$	$0.13\ h_0$	$0.05\ h_0$

Réponse indicielle

- Entrée : signal échelon $u(t)=\Gamma(t)$
- Réponse du système

$u(t)=\Gamma(t) \;\Rightarrow\; U(s)=\dfrac{1}{s}$. On en déduit $Y(s)=\dfrac{K}{s(1+Ts)}$

$$\boxed{y(t)=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)=K\left(1-e^{\lambda t}\right)}$$

- Valeur de la sortie en régime permanent

$$y_\infty=\lim_{t\to\infty} y(t)=K$$

- Tangente à l'origine

$x(t)=\dfrac{K}{T}t \quad$ (Pente = $\dfrac{K}{T}$)

La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale $y=K$ en $t=T$

Réponse indicielle (fin)

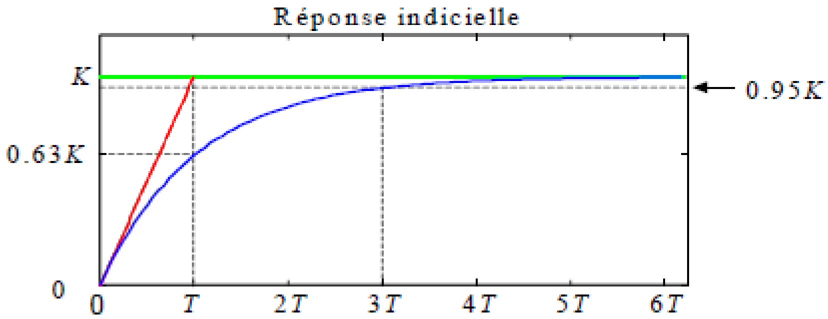
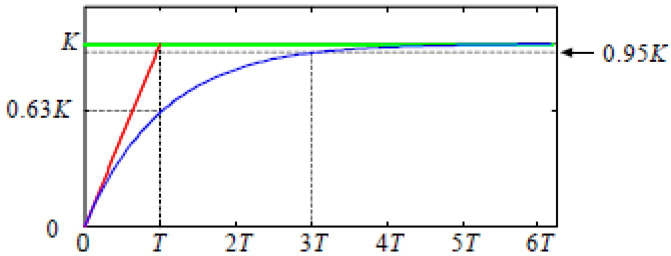


Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\dfrac{y(t)}{y_\infty}$(%)	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Rapidité du système



- Temps de réponse t_r du système

  t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

  $$\boxed{t_r \approx 3T}$$

- Temps de montée t_m

  t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

  $$\boxed{t_m \approx 2{,}2T}$$

Réponse à une rampe

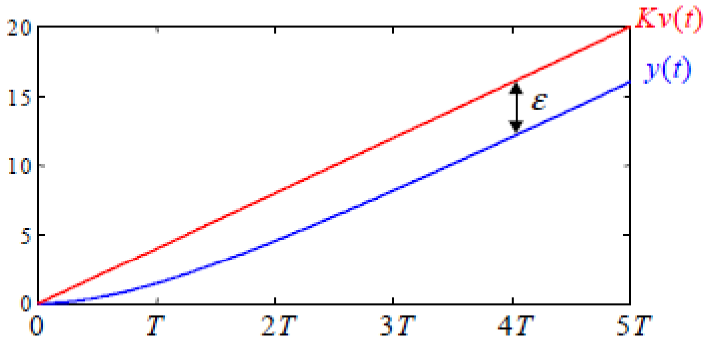
- Entrée : signal rampe $u(t) = v(t)$
- Réponse du système

  $u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \dfrac{1}{s^2}$. On en déduit $Y(s) = \dfrac{K}{s^2(1+Ts)}$

  $$\boxed{y(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}}$$

- Remarques
  - La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard T
  - Le terme $KTe^{-\frac{t}{T}} \approx 0$ au bout de $3T \Rightarrow$ la sortie tend asymptotiquement vers $K(t-T)$
  - La pente à l'origine est nulle

Réponse à une rampe (fin)



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T
- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé erreur de traînage

Erreur de traînage : $\varepsilon = KT$