CHAPITRE IV La convection forcée

IV.1. Ecoulement dans les tubes

إن ظاهرة تسخين او تبريد الموائع التي تسري داخل الأنابيب تعذ من بين المسائل الأساسية لانتقال الحرارة بالحمل (par convection).

إن دراسة الحمل الحراري تتطلب معرفة معامل الحمل الحراري h الذي هو معامل أساسي في عبارة التبادل الحراري عبر مساحة التلامس بين المائع والسطح الصلب (سطح الأنبوب) وهذه العلاقة تتمثل في علاقة نيوتن $\Phi = hs(Tp - Tf)$

وان هذا المعامل له علاقة مع علاقة Nusselt حيث : $Nu = \frac{h.L_o}{k}$

tel que; k est la conductivité thermique du fluide et Lo est la longueur caractéristique; et dans le cas ou l'écoulement est à l'intérieur d'un tube, cette longueur caractéristique est appelée le diamètre hydraulique

$$D_h = \frac{4.s}{p}$$

s est la section de la surface du tube

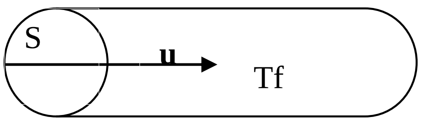
p est le périmètre mouillé (المبتل)

Exemple : un tube cylindrique de rayon R totalement rempli de fluide :

$s = \pi R^2$ et $p = 2\pi R$ $\rightarrow$ $D_h = 2R$

إذا كان الأنبوب ممتلئ نصفه فقط في هذه الحالة فان المحيط المبتل هو : $p = 2\pi R / 2 = \pi R$

في علاقة نيوتن يوجد المقدار Tf او To $\Phi = hs(Tp - Tf)$; الذي يمثل درجة الحرارة المرجعية للمائع . في هده الحالة تؤخذ درجة الحرارة الوسطية للمائع Tm=Tf (température moyenne)

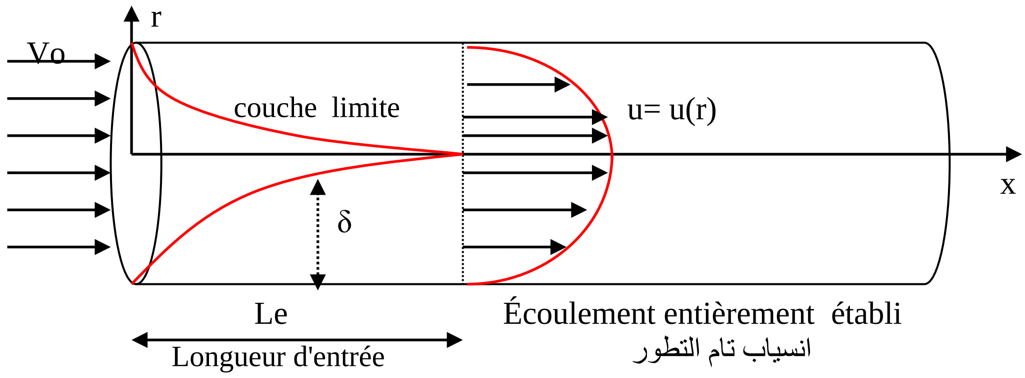


$$T_f = Tm = \frac{\int u.T.ds}{\int uds},$$ avec $ds = 2\pi r dr$

IV.2. Ecoulement laminaire dans un tube cylindrique (Ecoulement de Poiseuille)

Le régime dynamique établi

On dit que le régime d'écoulement est **dynamique établi** si la composante de vitesse **u** parallèle à l'écoulement ne dépend pas de temps t et de x et la composante de vitesse normale à l'écoulement $v_r=0$. c'est à dire que u=f(r)



Le régime établi thermiquement

le régime d'écoulement est établi thermiquement si la température adimensionnelle de fluide ne dépend ni de temps ni de x

يكون الانسياب تام التطور تحريكيا إذا كانت مركبة السرعة الموازية للانسياب u لا تتعلق لا بالزمن و لا بالمتغير x وان المركبة الناظمية للانسياب $v_r=0$. هذا يعني ان $u=f(r)$.

ويكون الانسياب تام التطور حراريا اذا كانت درجة حرارة المائع اللابعدية لا تتعلق لا بالزمن ولا بالمتغير x .
عند دخول المائع إلى الأنبوب تبدأ الطبقة الحدية التحريكية والحرارية (couche limite dynamique et thermique) في التكوين مباشرة عند مدخل الانبوب . وبعد مسافة معية من بداية الأنبوب والتي تسمى بمسافة الدخول Le فان الطبقة الحدية ستشمل كل الأنبوب وعموما هذه في الحالة التي يكون فيها الانسياب تام التطور (Etabli) الشكل 1.

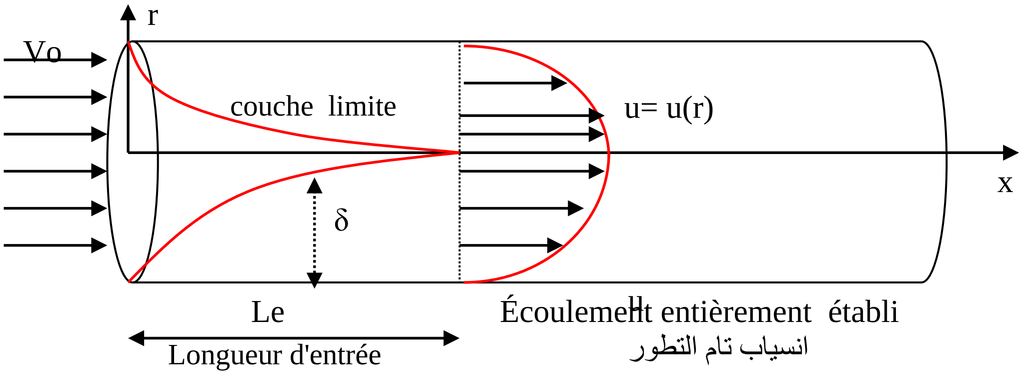


Figure 2. Ecoulent d'un tube cylindrique

Le profile d'un écoulement établi laminaire et turbulent dans un tube est donnée dans la figure 2.

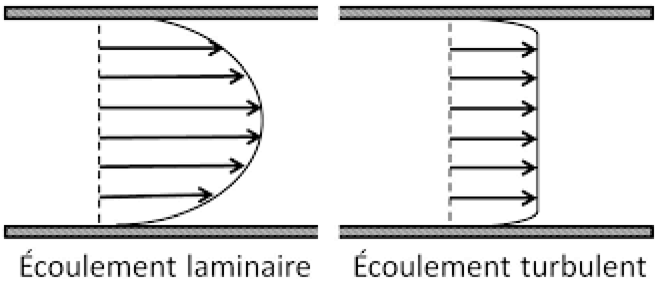


Figure 2. Profile d'un écoulement établi laminaire et turbulent

Remarque

L'écoulent dans les tubes cylindriques est laminaire si le nombre de Reynolds critique **Rec<2300** tel que :

$Re_D = \frac{\bar{u}.D}{\nu}$ avec $\bar{u}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement

Si $Re_D < Re_{cr}$, l'écoulement est laminaire

et pour $Re_D > Re_{cr}$ l'écoulement est turbulent.

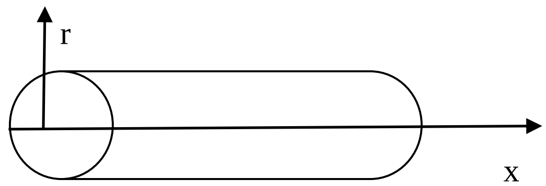
Equation de mouvement

L'équation de mouvement suivant ox dans *la couche limite* dans un tube cylindrique circulaire de rayon R et dans les coordonnées cylindrique est:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad \text{(IV.1)}$$

Pour un écoulement établi , u=u(r) ⟶ du/dx=0 et v=0. alors

$$0=-\frac{dp}{dx}+\mu.\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \rightarrow \quad \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{dp}{dx} \qquad \text{(IV.2)}$$



$\frac{dp}{dx}=\frac{p1-p2}{x1-x2}$<0

la pression p ne dépend pas de r et u ne dépend pas de x , alors on peut écrire

dp/dx=-b = cte

et de (IV.2) $\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{dp}{dx}$ = -b (IV.3)

ou b est une constante positive

pour trouver u on intègre la relation (IV.3).

$$\int d\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{b}{\mu}\int rdr \rightarrow \quad \left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{b}{\mu}\frac{r^2}{2}+c1$$

et $\int du=-\int\frac{b}{\mu}\frac{r}{2}dr+\int\frac{c1}{r}dr \rightarrow \quad u(r)=-\frac{b}{4\mu}r^2+c1.\ln(r)+c2$ (IV.4)

pour déterminer les constantes c1 et c2 on utilise les conditions aux limite suivants:

si r=0 , du/dr=0 ⟶ u= u_{max} ⟶ c1=0.

si r=R ⟶ u=0 ⟶ $c2=\frac{b}{4\mu}R^2$

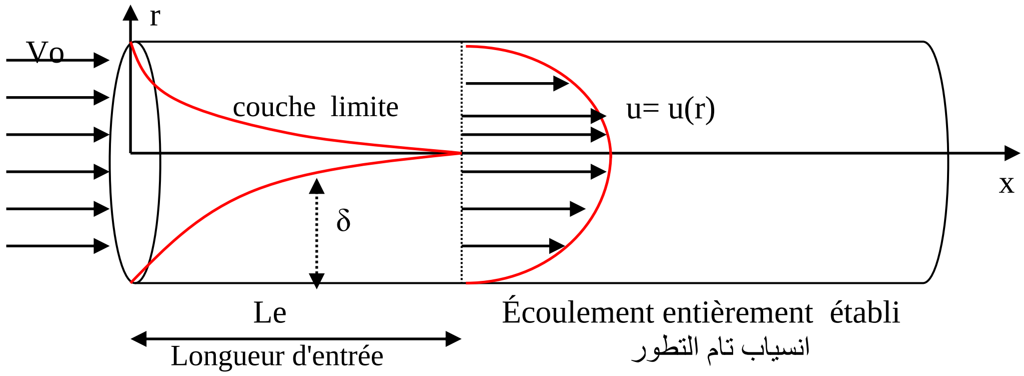
On remplace c1 et c2 dans (IV.4),

$$u(r)=\frac{bR^2}{4\mu}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{(IV.5)}$$

La vitesse maximale est:

$$\mathbf{u_{max}} = u(r=0) = \frac{bR^2}{4\mu}$$

$$\rightarrow \quad u(r) = u_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2}) \quad \text{avec } 0 \leq r \leq R \qquad \text{(IV.6)}$$



La vitesse moyenne peut être déterminé par :

$$\bar{u} = \frac{1}{s}\int uds = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u.2\pi rdr = \frac{u_{max}}{2} \qquad \text{(IV.7)}$$

avec $\mathbf{u_{max}} = \dfrac{bR^2}{4\mu}$

Le début volumique est donné par:

$$Q_v = \bar{u}.s = \bar{u}.\pi R^2 = \frac{b}{8\mu}\pi R^4 \qquad \text{(IV.8)}$$

Cette dernière relation permet ainsi de faire le lien entre le débit volumique et **les pertes de charge régulières** ΔP puisque

$b = \dfrac{dp}{dx}$,

La différence de pression totale (ou perte de charge) engendrée par les frottements visqueux dans une conduite de longueur $L = \Delta x$ est donc proportionnelle à L

$b = \dfrac{\Delta p}{\Delta x} = \dfrac{\Delta p}{L}$ On remplace cette relation dans (IV.8), on trouve

$$Q_v = \frac{\Delta p}{8\mu L}\pi R^4 \rightarrow \Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4}Q_v \qquad \text{(IV.9)}$$

Longueur d'entrée

Pour l’écoulement laminaire la longueur de la région d’entrée est donnée expérimentalement par :

$$\frac{Le}{D} = 0.06\,\mathrm{Re}_D$$

Pour un écoulement turbulent:

$$\frac{Le}{D} = 4.4\,\mathrm{Re}_D^{1/6}$$

avec $\mathrm{Re}_D = \dfrac{\bar{u}.D}{\nu}$

Application

Un tube cylindrique de rayon R=0.5 cm de longueur L= 50 M transport de l'eau avec un début volumique souhaité est de 0.04 l/s

1. déterminer le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent)
2. calculer la vitesse maximale de l'écoulement
3. calculer les pertes de charge
4. si la pression d'entrée est Pe= 3 bar, déterminer la pression de sortie Ps
5. calculer la longueur d'entrée pour que l'écoulement devienne établi

on donne ρ_{eau}= 1000 kg/m^3 , μ= 10^{-3} kg/m.s

Solution

1. Pour déterminer le régime d'écoulement on calcul le nombre de Reynolds

$\mathrm{Re}_D = \dfrac{\bar{u}.D}{\nu}$, mais il faut déterminer tout abord la vitesse d'écoulement moyenne utilisant :

$$Q_v = \bar{u}.s \quad \rightarrow \quad \bar{\mathrm{u}} = \frac{Q_v}{s} = 0.5m/s$$

Avec:

Q_v=0.04 l/s= 0.04.10^{-3} m^3/s

s=π.R^2= π.(0.5.10^{-2})^2= 0.785.10^{-4} m^2

La viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho_{eau} = 10^{-6}\ m^2/s$

alors : $\mathrm{Re}_D = \dfrac{0.5x1.10^{-2}}{10^{-6}}$ $=5.10^3$

Re_D > Rec (=2300) donc le régime est turbulent

2. la vitesse maximale de l'écoulement

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} \qquad \textbf{(a)}$$

et d'autre part : $u_{\max} = 2.\bar{u} = 1.m/s$

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} = \frac{2.Qv}{\pi R^2} = 2.\bar{u} = 1.m/s$$

3. Les pertes de charge ΔP

$$b = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L} \rightarrow \Delta p = b.L \qquad \textbf{(b)}$$

De la relation (a) on a :

$$u_{\max} = \frac{bR^2}{4\mu} \quad b = \frac{4.\mu}{R^2} u_{\max} = 160$$

on remplace dans la relation (b) , on trouve :

ΔP= 160x5= 800 pascale = 0.08 bar

4. la pression de sortie

Δp = Pe-Ps $\rightarrow$ Ps= Pe- Δp = 3-0.08= 2.92 bar

5. la longueur d'entrée pour que l'écoulement devienne établi

On utilise la formule empirique suivante:

$$\frac{Le}{D} = 4.4\,\mathrm{Re}_D^{1/6} \quad \rightarrow \quad \text{Le} = 0.18\ \text{m}$$