Chapitre 2

Commande scalaire de la machine asynchrone

- Scalar Control of Induction Machine -

Contenu

1- Principe de la variation de vitesse d'une machine asynchrone

En négligeant les frottements visqueux, l'équation mécanique se réduit à :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r$$

Par intégration on obtient :

$$\Omega = \frac{1}{J}\int_0^t (C_{em} - C_r)dt + \Omega_0$$

Cette expression montre que le contrôle de la vitesse de rotation passe nécessairement par celui du couple.

Grandeurs de réglage du couple

L'expression du couple en régime permanent est donné par :

$$C_{em} = 3p\left(\frac{v_s}{\omega_s}\right)^2 \omega_s \frac{\frac{R'_r}{g}}{\left(\frac{R'_r}{g}\right)^2 + (L'_r\omega_s)^2}$$

Observation 1: En examinant cette expression, il est possible de contrôler le couple par action sur le nombre de paires de pôles, la tension statorique, résistance rotorique, la pulsation statorique et le glissement.

D'un autre côté, nous avons :

$$\Omega = (1-g)\Omega_s = (1-g)\frac{\omega_s}{p}$$

Observation 2: Afin de contrôler la vitesse de la machine asynchrone, il suffit de faire varier le nombre de paires de pôles, la pulsation statorique et le glissement.

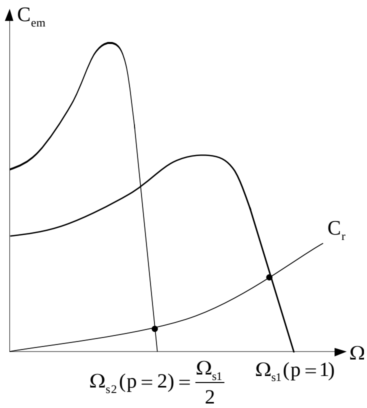
2- Réglage de la vitesse d'une machine asynchrone par changement du nombre de paires de pôles

Principe

La vitesse de synchronisme d'une MAS dépend de la fréquence f_s de la tension d'alimentation et du nombre de paires de pôles du stator p.

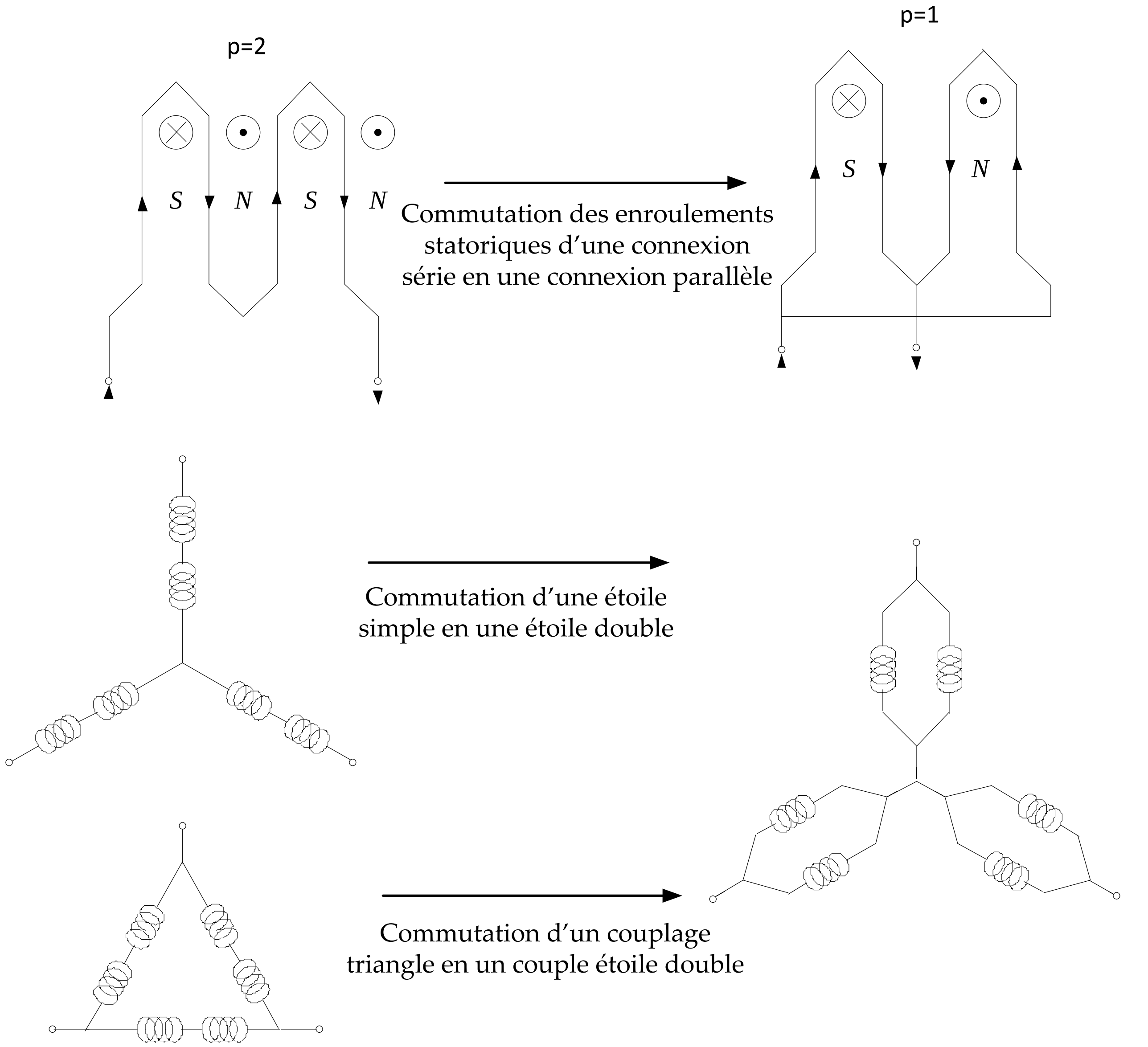
$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{p} = \frac{2\pi f_s}{p}$$

En modifiant le nombre de paires de pôles, on peut régler Ω_s et par voie de conséquence la vitesse de la machine.



Moteur à deux vitesses

Dans ce type de moteur, l'enroulement de chaque phase statorique se compose de deux parties identiques. La commutation de ces parties d'une connexion série à une connexion parallèle permet de diminuer le nombre de paires de pôles de moitié.



Le réglage par commutation des pôles est un réglage échelonné de la vitesse. Ce mode n'est donc pas adapté au réglage fin de la vitesse.

Applications

- Machines-outils ;

- Ventilateurs ;

- Pompes.

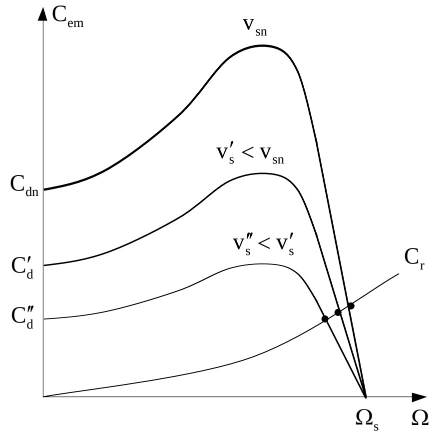
3- Variation de la vitesse par action sur le glissement

Dans ce mode de réglage, on fait varier le glissement à fréquence d'alimentation constante. Ceci est possible soit par action sur le stator ou sur le rotor.

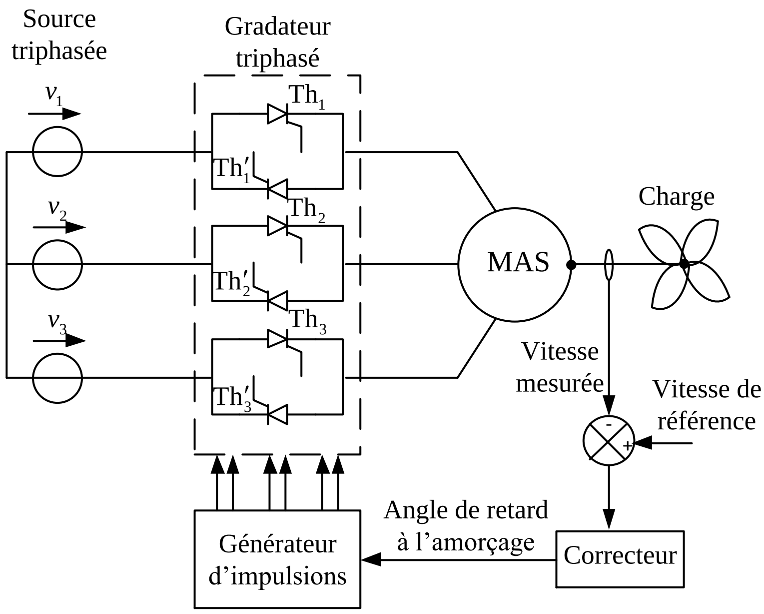
3.1- Par action sur le stator : Par variation de la tension d'alimentation statorique

Principe

A glissement donné, le couple est proportionnel au carré de la tension statorique. Il est possible donc de baisser la vitesse de la machine par diminution de la valeur efficace de la tension statorique.



Afin de varier la valeur efficace de la tension d'alimentation, il suffit d'interposer un gradateur triphasé entre le réseau et la machine, voir figure ci-dessous. Ce convertisseur est connu par sa simplicité de réalisation et de commande mais il fournit des courants et tensions riches en harmoniques, ce qui accroit le problème d'échauffement surtout à basses vitesses.



Inconvénients de ce type de variateur

- Faible gamme de variation de vitesse

- Ce variateur ne peut être utilisé que pour l'entrainement des charges dont le couple croit très vite avec la vitesse telles que les ventilateurs et les pompes.

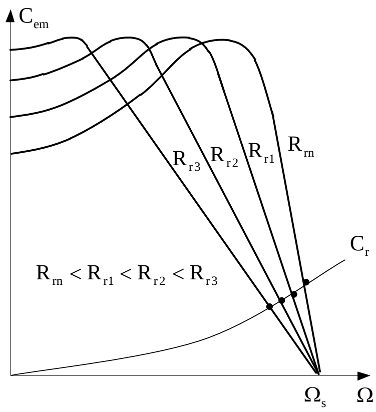
- Par réduction de la tension, on réduit aussi le couple maximal ce qui va diminuer la stabilité du point de fonctionnement.

- Comme les pertes Joule rotoriques sont proportionnelles au glissement, le fonctionnement à glissement élevé va conduire une faible valeur du rendement.

3.2- Par action sur le rotor : Par extraction de la puissance au rotor

Cette solution exige de disposer d'un moteur asynchrone à rotor bobiné à bagues.

a) Par dissipation de l'énergie rotorique



Principe

Pour diminuer la vitesse, il suffit d'augmenter la résistance des enroulements rotoriques par l'ajout de résistances externes.

On constate que :

- Lorsque la résistance par phase rotorique augmente, le glissement à couple résistant donné croit.

- Le couple maximal de la machine reste constant indépendamment de la variation de la résistance rotorique.

Avantages de ce type de variateur

- Ce variateur permet de régler la vitesse d'une charge quelconque car la partie utilisée des caractéristiques mécaniques de la machines est toujours stable.

- Les pertes Joules dues à l'augmentation du glissement sont dissipées à l'extérieur de la machine. Ceci permet à la machine de développer son couple maximal à toutes les vitesses.

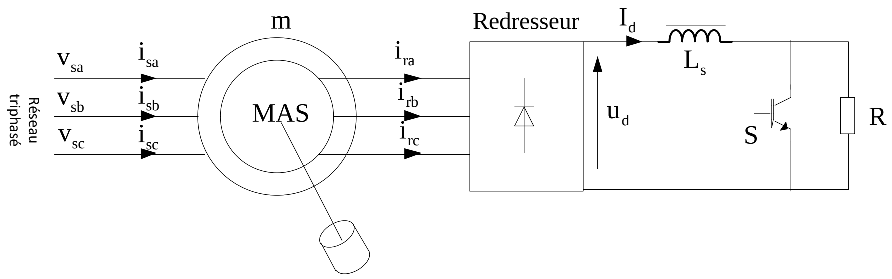
Inconvénients de ce type de variateur

- Faible plage de variation de vitesse.

- L'augmentation du glissement conduit à l'augmentation des pertes Joule rotoriques ce qui va réduire le rendement.

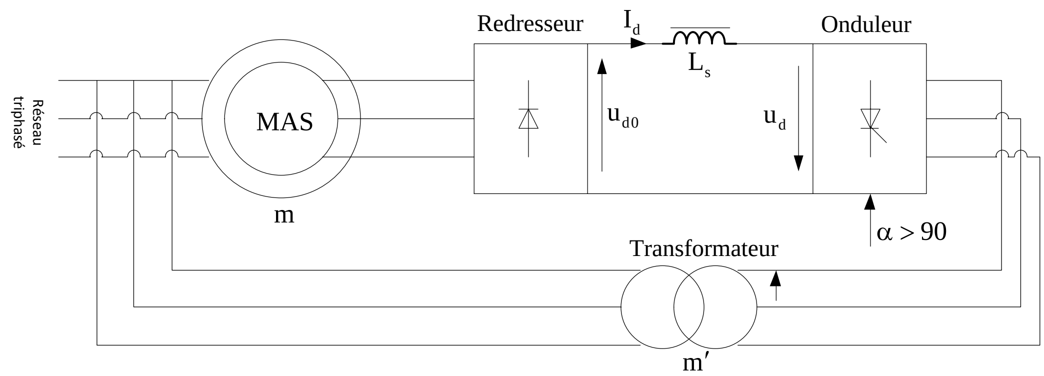
- Méthode limitée aux faibles puissances car autrement se pose le problème d'évacuation de la chaleur perdues dans la résistance externe ainsi que le rendement du variateur.

Dans la figure ci-dessous, l'ensemble redresseur-filtre-hacheur est équivalent à une résistance variable par action sur le rapport cyclique du hacheur.



b) Par récupération de l'énergie rotorique

Afin d'améliorer le rendement, il faut récupérer la puissance de glissement en la réinjectant au réseau d'alimentation au lieu de la gaspiller en pertes Joules. Cependant, si on veut renvoyer cette puissance dans le réseau, il faut ramener les grandeurs rotoriques de fréquence f_r à celle du réseau de fréquence f_s. La solution consiste à utiliser un convertisseur formé d'un redresseur du côté rotor et un onduleur du côte réseau, comme le montre la figure ci-dessous :



Le redresseur transforme les grandeurs rotoriques de fréquence gf_s en des grandeurs continues. Ces dernières sont transformées par l'onduleur en des grandeurs triphasées de fréquence égale à celle du réseau.

Dans ce montage, l'inductance est utilisée pour lisser le courant continu et le transformateur sert à adapter la tension de sortie de l'onduleur à celle du réseau.

4- Variation de la vitesse par action sur la fréquence

Principe

Modifier la fréquence de la tension statorique est équivalent à faire varier la vitesse du champ tournant. Le rotor suit cette vitesse au glissement près.

La tension d'alimentation produit dans la machine un flux tel que :

$v_s \cong n_s \dfrac{d\phi_s}{dt}$ où n_s est le nombre de spires par paires de pôles

Pour une tension sinusoïdale de la forme $v_s = v_{sm}\sin(\omega_s t)$, le flux statorique est calculé par :

$$\phi_s = -\frac{v_{sm}}{n_s\omega_s}\cos(\omega_s t) + \phi_{s0}$$

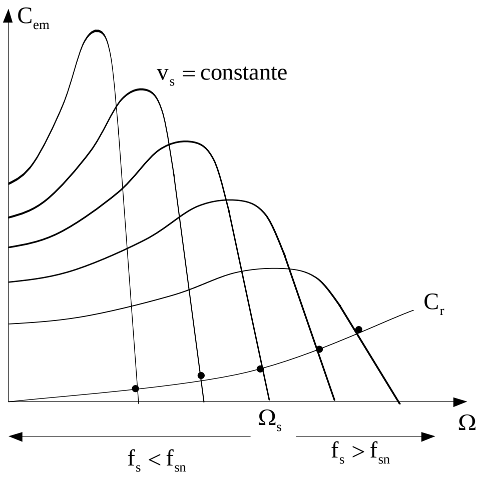
La valeur maximale du flux est :

$$\phi_{max} = \frac{v_{sm}}{n_s \omega_s} = \frac{\sqrt{2} v_{seff}}{2\pi n_s f_s}$$

Cette expression montre que le flux maximal ne dépend que de la tension efficace et la fréquence d'alimentation. A noter que le flux est indépendant de la vitesse de rotation de la machine.

A tension d'alimentation constante, le flux croit lorsque la fréquence diminue. Cet accroissement du flux est atténué par le phénomène de saturation. D'un autre côté, une augmentation de la fréquence conduit à une augmentation importante des pertes fer, ce qui va à son tour diminuer le rendement de la machine.

La variation de la fréquence conduit aux caractéristiques mécaniques de la figure suivante.



5. Commande scalaire

Cette commande consiste à imposer le flux dans la machine d'une manière indirecte en agissant sur sa tension ou sur son courant selon des lois déduites des équations de la machine asynchrone en régime permanent.

5.1 Commande scalaire en tension

L'objectif est le contrôle indirect du flux par action sur la tension statorique.

Principe

La tension statorique s'exprime en fonction du flux statorique par la relation complexe suivante :

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + j\omega_s \bar{\phi}_s$$

Afin d'exprimer la tension en fonction du flux, on doit exprimer le courant statorique en fonction du flux statorique.

Sachant que :

$$\bar{\phi}_s = L_s \bar{i}_s + M \bar{i}_r$$

$\bar{\phi}_r = L_r \bar{i}_r + M \bar{i}_s$

$0 = R_r \bar{i}_r + j\omega_r \bar{\phi}_r$

Etape 1 : Exprimons $\bar{I}_r$ en fonction de $\bar{I}_s$:

La multiplication de la deuxième équation par $j\omega_r$ donne :

$j\omega_r \bar{\phi}_r = jL_r\omega_r \bar{i}_r + jM\omega_r \bar{i}_s$

A l'aide de la troisième équation on peut écrire :

$jL_r\omega_r \bar{i}_r + jM\omega_r \bar{i}_s = -R_r \bar{i}_r$

Donc :

$(R_r + jL_r\omega_r)\bar{i}_r + jM\omega_r \bar{i}_s = 0$

D'où

$$\bar{i}_r = -\frac{jM\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r}\bar{i}_s$$

Etape 2 : Exprimons $\bar{\phi}_s$ en fonction de $\bar{I}_s$

Remplaçons $\bar{I}_r$ dans la première équation :

$$\bar{\phi}_s = L_s \bar{i}_s + M \bar{i}_r = L_s \bar{i}_s - \frac{jM^2\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r}\bar{i}_s$$

$$\bar{\phi}_s = (L_s - \frac{jM^2\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r})\bar{i}_s = \frac{R_rL_s + jL_rL_s\omega_r - jM^2\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r}\bar{i}_s = \frac{R_rL_s + j(L_rL_s - M^2)\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r} = \frac{R_rL_s + jL_rL_s \overbrace{(1 - \frac{M^2}{L_rL_s})}^{\sigma:\text{Coefficient de dispersion}} \omega_r}{R_r + jL_r\omega_r}$$

$$\bar{\phi}_s = L_s \frac{R_r + jL_r\sigma\omega_r}{R_r + jL_r\omega_r}\bar{i}_s = L_s \frac{1 + j\overbrace{\frac{L_r}{R_r}}^{\tau_r}\sigma\omega_r}{1 + j\underbrace{\frac{L_r}{R_r}}_{\tau_r}\omega_r}\bar{i}_s = L_s \frac{1 + j\tau_r\sigma\omega_r}{1 + j\tau_r\omega_r}\bar{i}_s$$

Exprimons $\bar{I}_s$ en fonction de $\bar{\phi}_s$

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{\phi}_s}{L_s}\frac{1 + j\tau_r\omega_r}{1 + j\tau_r\sigma\omega_r}$$

En remplaçant le courant complexe statorique par son expression dans l'expression de la tension, on obtient :

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + j\omega_s \bar{\phi}_s = R_s \frac{\bar{\phi}_s}{L_s} \frac{1 + j\tau_r\omega_r}{1 + j\tau_r\sigma\omega_r} + j\omega_s\bar{\phi}_s$$

$$\bar{v}_s = \bar{\phi}_s\omega_s\left(\frac{R_s}{L_s\omega_s}\frac{1 + j\tau_r\omega_r}{1 + j\sigma\tau_r\omega_r} + j\right) = \bar{\phi}_s\omega_s\left(\frac{\frac{R_s}{L_s\omega_s}(1 + j\tau_r\omega_r) + j - \sigma\tau_r\omega_r}{1 + j\sigma\tau_r\omega_r}\right) = \bar{\phi}_s\omega_s\frac{\frac{R_s}{L_s\omega_s} - \sigma\tau_r\omega_r + j(1 + \frac{R_s\tau_r\omega_r}{L_s\omega_s})}{1 + j\sigma\tau_r\omega_r}$$

Le module de la tension statorique est :

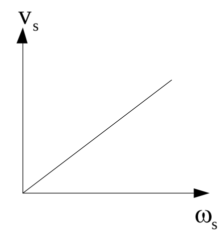
$$v_s = \phi_s\omega_s\sqrt{\frac{\left(\frac{R_s}{L_s\omega_s} - \sigma\tau_r\omega_r\right)^2 + \left(1 + \frac{R_s\tau_r\omega_r}{L_s\omega_s}\right)^2}{1 + (\sigma\tau_r\omega_r)^2}}$$

A partir de cette expression, on conclut que pour imposer le flux statorique en agissant sur la tension, il est nécessaire de connaitre les pulsations ω_s et ω_r ainsi que les éléments de la machine

(R_s, R_r, L_s, L_r).

Version simplifiée de la commande scalaire en tension

En négligeant la résistance statorique $(R_s \approx 0)$, on obtient la loi de commande suivante :



$$v_s = \phi_s\omega_s \Rightarrow \phi_s = \frac{v_s}{\omega_s}$$

Afin de maintenir le flux ϕ_s, il faut garder le rapport $\frac{v_s}{\omega_s} = k = \text{Constant}$ .La constante k est calculée en régime nominale par :

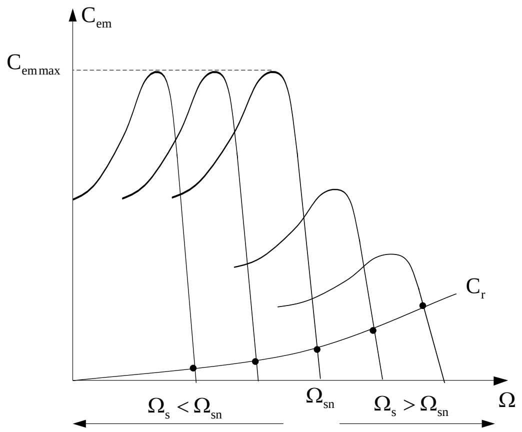
$$k = \frac{v_{sn}}{\omega_{sn}}$$

Conséquences du fonctionnement à flux constant :

- Le couple maximal est constant:

$$C_{em\,max} = \frac{3p}{2L_r}k^2$$

Le maintien du flux statorique à une valeur constante permet d'éviter le déclassement de la machine en couple.



- Le couple est exprimé par :

$$C_{em} = 3pk^2 \frac{R'_r \omega_r}{R'^2_r + (L'_r \omega_r)^2} \text{ à faible glissement } (L'_r\omega_r)^2 \ll R'^2_r \Rightarrow C_{em} \simeq 3p\frac{k^2}{R'_r}\omega_r$$

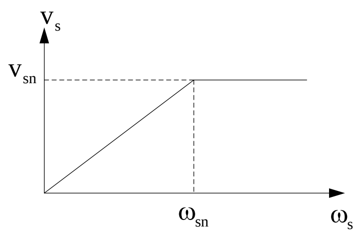
Dans ce cas, le contrôle du couple se fait par l'action sur la pulsation du glissement.

Correction de la commande scalaire simplifiée à grandes vitesses

Si un fonctionnement en survitesses de la machine asynchrone est envisagé, il n'est pas possible de dépasser la tension nominale. Dans ce cas, le flux ϕ_s doit être diminué, ce qui provoque une diminution du couple maximal que peut produire la machine.

La loi de commande scalaire modifiée est comme suit :

$$v_s = \begin{cases} k\omega_s = \dfrac{v_{sn}}{\omega_{sn}}\omega_s & \text{si} \quad \omega_s < \omega_{sn} \\ v_{sn} & \text{si} \quad \omega_s > \omega_{sn} \end{cases}$$



Correction de la loi de commande à basses vitesses

A basses vitesses, la chute de tension Ohmique ne peut pas être négligée devant la chute inductive. Elle doit être donc compensée par l'ajout d'un terme v_{s0} à la tension v_s, ce qui en résulte la loi de commande suivante :

$$v_s = \begin{cases} \dfrac{v_{sn} - v_{s0}}{\omega_{sn}}\omega_s & \text{si} \quad \omega_s < \omega_{sn} \\ v_{sn} & \text{si} \quad \omega_s > \omega_{sn} \end{cases}$$

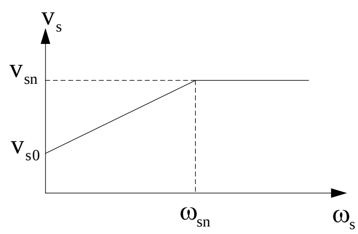
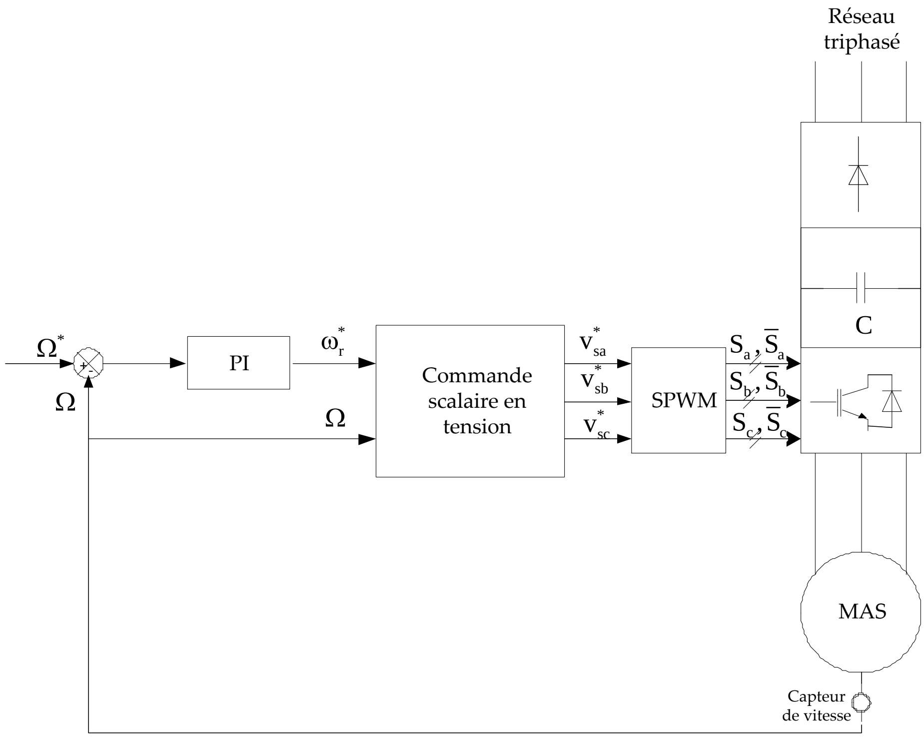
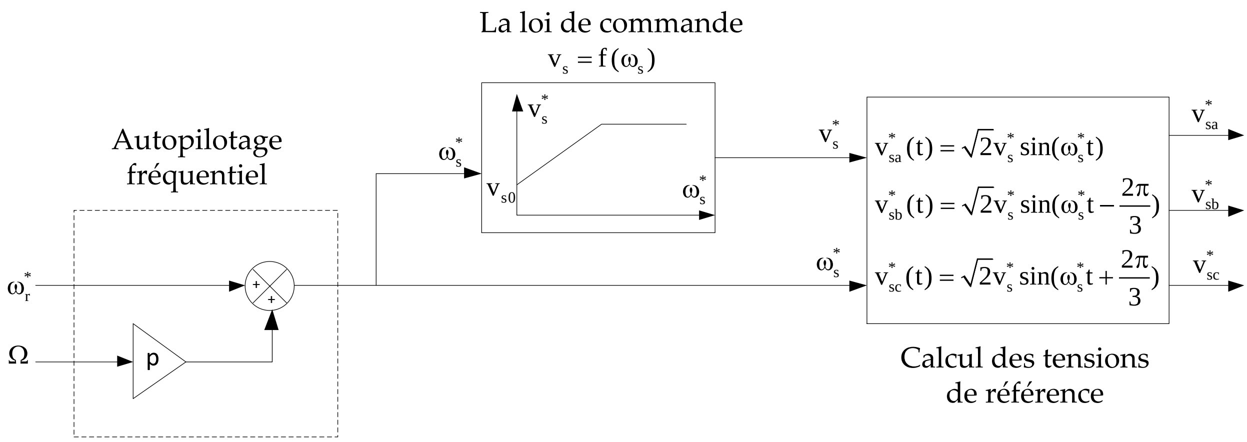


Schéma de la commande scalaire en tension

Le schéma ci-dessous sert à asservir la vitesse de la machine asynchrone alimentée par un onduleur de tension.



Bloc : Commande scalaire en tension



Dans cette structure, le calcul des tensions de référence nécessite la connaissance de :

- L'amplitude des tensions statoriques dont la valeur est fournie par la loi de commande scalaire $v_s = f(\omega_s)$;

- La pulsation statorique dont la valeur est donnée par la relation de l'autopilotage fréquentiel suivante :

$$\omega_s^* = \omega_r^* + \omega$$

Avec :

ω_r^* : est la pulsation rotorique fournit par le régulateur de vitesse

ω : est la vitesse de rotation de la machine

5.2 Commande scalaire en courant

Principe

L'idée consiste à contrôler indirectement le flux par action sur les courants statoriques.

L'expression complexe du courant statorique est :

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{\phi}_s}{L_s}\frac{1+j\tau_r\omega_r}{1+j\tau_r\sigma\omega_r}$$

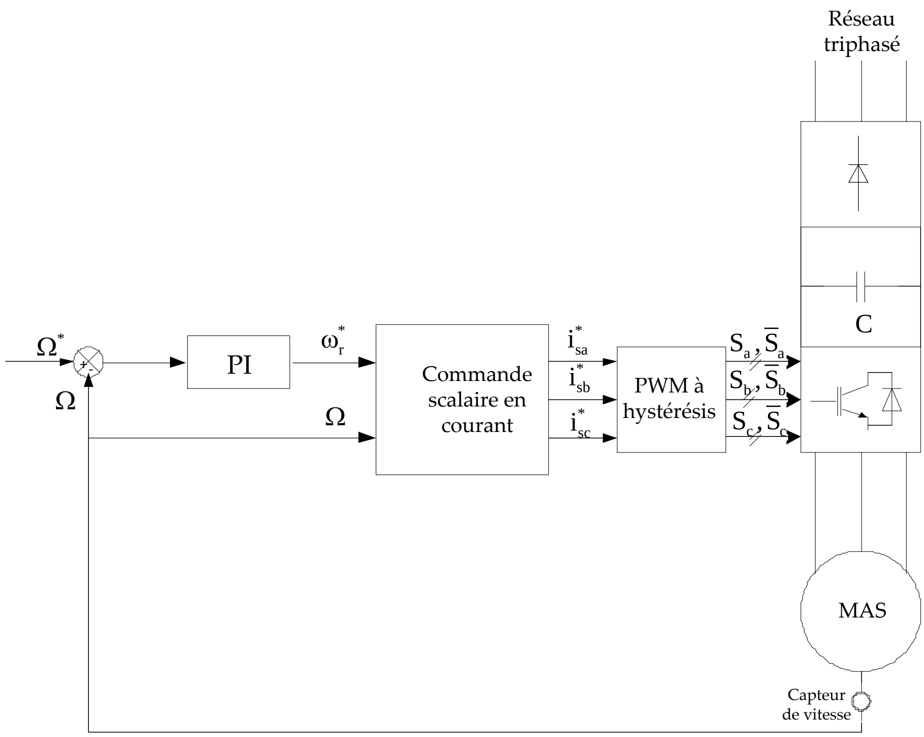
Soit en module :

$$i_s = \frac{\phi_s}{L_s}\sqrt{\frac{1+(\tau_r\omega_r)^2}{1+(\tau_r\sigma\omega_r)^2}}$$

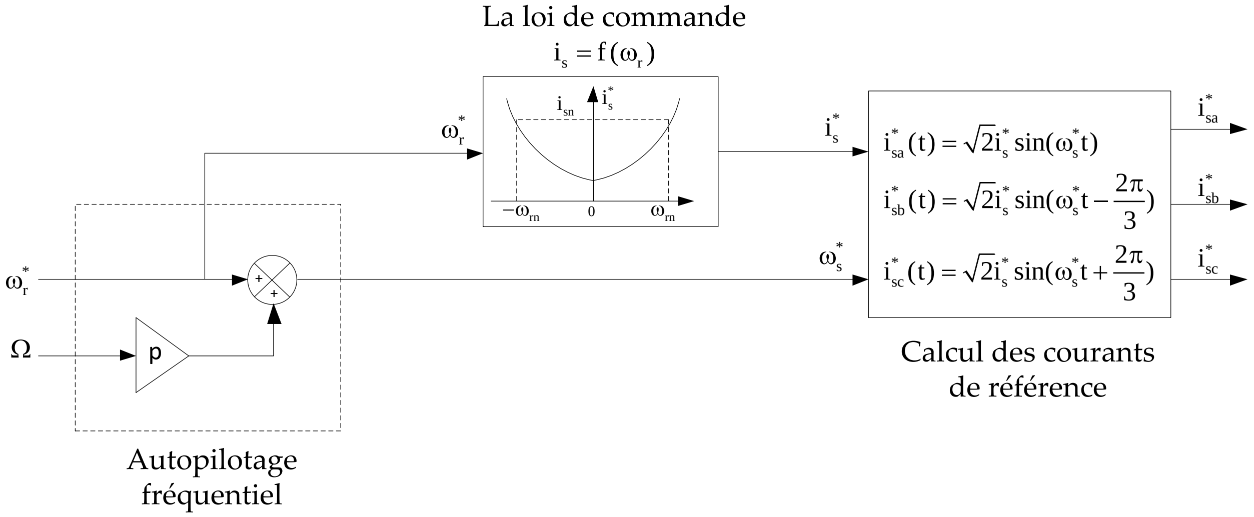
La courbe $i_s = f(\omega_r)$ précise la valeur du courant qui doit circuler dans les enroulements statoriques afin de maintenir le flux à sa valeur nominale.

Schéma de la commande scalaire en courant à base d'onduleur de tension piloté en courant

Le schéma ci-dessous sert à asservir la vitesse de la machine asynchrone alimentée par un onduleur de tension contrôlé en courant.



Bloc : Commande scalaire en courant



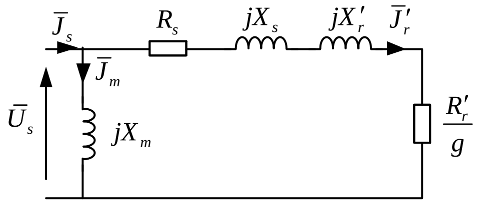
Dans cette structure, le calcul des trois courants de référence nécessite la connaissance de :

- L'amplitude des courant statoriques dont la valeur est fournie par la loi de commande scalaire $i_s = f(\omega_r)$;

- La pulsation statorique dont la valeur est donnée par la relation de l'autopilotage fréquentiel précédente.

Exercice

Un moteur asynchrone (MAS) triphasé à cage d'écureuil, connecté en triangle, 230 V-400 V, 50 Hz, 4 pôles, 1370 tr/min, est alimenté par un gradateur triphasé à. Le moteur entraine un ventilateur dont le couple résistant est de la forme $C_r = k(1-g)^2$ où g représente le glissement. On admet que le schéma équivalent par phase du MAS ramené au stator est celui de la figure ci-contre dont les paramètres sont: $R_s = 2\Omega$, $R'_r = 5\Omega$, $X_s = X'_r = 5\Omega$, $X_m = 80\Omega$.



1) Sur quelle grandeur doit le gradateur agir pour faire varier la vitesse du MAS ?
2) Donner l'expression du couple électromagnétique en régime permanent en fonction de la tension statorique par phase U_s, la pulsation statorique ω_s, le glissement g et les paramètres du moteur.
3) Le moteur fonctionne en régime nominal :
   a) Calculer le glissement nominal.
   b) Calculer le couple nominal.
   c) Calculer la constante k de l'expression du couple résistant.
4) Le moteur tourne à une vitesse de 1200 tr/min :
   a) Calculer le glissement.
   b) Calculer le couple de charge.
   c) Donner les expressions complexes des courants $\bar{J}'_r$, $\bar{J}_m$ et $\bar{J}_s$. En déduire la valeur efficace du courant de ligne.
5) Le moteur est alimenté par une tension composée de 300 V :
   a) Calculer le glissement sachant que la solution de l'équation d'ordre quatre suivante $104x^4 - 188x^3 + 89x^2 - 179x + 25 = 0$ est $x = 0.147$.
   b) Calculer le couple de charge.
   c) Calculer la vitesse de rotation du moteur.
   d) Calculer la valeur efficace du courant de ligne.

Solution

1) Principe

Afin de contrôler la vitesse du MAS, le gradateur doit agir sur la valeur efficace de la tension statorique par action sur l'angle d'amorçage des thyristors.

2) Expression du couple électromagnétique

Le courant rotorique est exprimé par :

$$\bar{J}_r = \frac{\bar{U}_s}{R_s + \frac{R'_r}{g} + j(X_s + X'_r)}$$

Son module est calculé par :

$$J_r = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + \frac{R'_r}{g})^2 + (X_s + X'_r)^2}}$$

La puissance transmise au rotor (air-gap power) est:

$$P_{tr} = 3\frac{R'_r}{g} J'^2_r$$

Les pertes Joule rotorique sont :

$$P_{cu} = 3R'_r J'^2_r$$

La puissance électrique convertie en une puissance mécanique est :

$$P_m = P_{tr} - P_{cu} = 3R'_r \frac{1-g}{g} J'^2_r$$

Le couple développé par le moteur est :

$C_{em} = \frac{P_m}{\Omega_m}$ où $\Omega_m = (1-g)\Omega_s = (1-g)\frac{\omega_s}{p}$ est la vitesse rotorique ; $\Omega_s = \frac{\omega_s}{p}$: pulsation de synchronisme du champ tournant en rad/s, ω_s : pulsation des courants alternatifs en rad/s ; $\omega_s = 2\pi f_s$, p : nombre de paires de pôle.

En remplaçant la puissance P_m par sa valeur, il vient :

$$C_{em} = \frac{3R'_r \frac{1-g}{g} J'^2_r}{(1-g)\frac{\omega_s}{p}} = \frac{3p}{\omega_s} \frac{R'_r}{g} J'^2_r$$

En comparant cette expression avec celle de P_{tr} , il vient que : $C_{em} = \frac{pP_{tr}}{\omega_s} = \frac{P_{tr}}{\Omega_s}$

En remplaçant I'_r par sa valeur, on obtient :

$$C_{em} = \frac{3pU_s^2}{\omega_s} \frac{\frac{R'_r}{g}}{(R_s + \frac{R'_r}{g})^2 + (X_s + X'_r)^2}$$

3) Fonctionne en régime nominal

a) Calcul du glissement nominal

Pour calculer le glissement, on commence par le calcul de la vitesse de synchronisme. La formule de cette dernière en tours/minutes est :

$N_s = \frac{60 f_s}{p}$ avec $p = 2$ le nombre de pair de pôles, $f_s = 50Hz$: la fréquence d'alimentation

$$N_s = \frac{60 \times 50}{2} = 1500\ tr/\min$$

Le glissement en pleine charge est :

$$g = \frac{N_s - N}{N_s} = \frac{1500 - 1370}{1500} = 0.0867$$

b) Calcul du couple nominal

$$C_{emn} = \frac{3 \times 2 \times 400^2}{100\pi} \frac{\frac{5}{0.0867}}{(2 + \frac{5}{0.0867})^2 + (5+5)^2} = 48.13\,Nm$$

La tension de phase est une tension composée.

c)- Calcul de la constante k de l'expression du couple résistant

Comme la charge est un ventilateur, son couple de charge est proportionnel au carrée de la vitesse. $C_r = k'\Omega^2 = k'(1-g)^2\Omega_s^2 = k(1-g)^2$

A pleine charge nous avons $C_r = C_{em} \Rightarrow k(1-g_n)^2 = C_{emn}$, la constante k est calculée par :

$$k = \frac{C_{emn}}{(1-g_n)^2} = \frac{48.13}{(1-0.0867)^2} = 57.7\ Nm$$

D'où $C_r = 57.7(1-g)^2$

4) Le moteur tourne à une vitesse de 1200 tr/min

a)- Calcul du glissement

$$g = \frac{N_s - N}{N_s} = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0.2$$

b)- Calcul du couple de charge

$C_r = 57.7(1-g)^2 = 57.7(1-0.2)^2 = 36.928 = 36.93\,Nm$

c)- Expressions complexes des courants $\bar{J}'_r$, $\bar{J}_m$ et $\bar{J}_s$

- Calcul de la tension par phase

En régime établi, nous avons :

$$C_{em} = \frac{3pU_s^2}{\omega_s}\frac{\frac{R'_r}{g}}{(R_s+\frac{R'_r}{g})^2+(X_s+X'_r)^2} = C_r \Rightarrow U_s = \sqrt{\frac{\omega_s}{3p}\frac{(R_s+\frac{R'_r}{g})^2+(X_s+X'_r)^2}{\frac{R'_r}{g}}C_r}$$

$$U_s = \sqrt{\frac{100\pi}{3\times 2}\frac{(2+\frac{5}{0.2})^2+(5+5)^2}{\frac{5}{0.2}}36.93} = 253.2189 = 253.22V$$

Le courant $\bar{J}'_r$ est calculé par :

$$\bar{J}'_r = \frac{\bar{U}_s}{R_s+\frac{R'_r}{g}+j(X_s+X'_r)} = \frac{253.22}{2+\frac{5}{0.2}+j(5+5)} = \frac{253.22}{27+j10} = 8.247-j3.054 \quad (A)$$

Le courant $\bar{J}_m$ est calculé par :

$$\bar{J}_m = \frac{\bar{U}_s}{jX_m} = \frac{253.22}{j80} = -j3.165 \quad (A)$$

Le courant $\bar{J}_s$ est calculé par :

$$\bar{J}_s = \bar{J}'_r + \bar{J}_m = 8.242 - j3.054 - j3.165 = 8.247 - j6.219 = 10.329\angle -37°$$

La valeur efficace du courant de ligne est :

$$I_s = \sqrt{3}J_s = \sqrt{3}\times 10.329 = 17.89\ A$$

5) Le moteur est alimenté par une tension composée de 300 V

a)- Calcul du glissement

En régime permanent, nous avons :

$$C_{em} = \frac{3pU_s^2}{\omega_s}\frac{\frac{R'_r}{g}}{(R_s+\frac{R'_r}{g})^2+(X_s+X'_r)^2} = C_r = k(1-g)^2$$

$$k(1-g)^2((R_s+\frac{R'_r}{g})^2+(X_s+X'_r)^2)=\frac{3pU_s^2}{\omega_s}\frac{R'_r}{g}$$

$$k(1-g)^2((R_s g+R'_r)^2+g^2(X_s+X'_r)^2)=\frac{3pU_s^2}{\omega_s}gR'_r$$

$$k(1+g^2-2g)(R_r'^2+2R_sR'_rg+g^2(R_s^2+(X_s+X'_r)^2))=\frac{3pU_s^2}{\omega_s}gR'_r$$

$$kR_r'^2+2kR_sR'_rg+kg^2(R_s^2+(X_s+X'_r)^2)+kR_r'^2g^2+2kR_sR'_rg^3+kg^4(R_s^2+(X_s+X'_r)^2)$$

$$-2kR_r'^2g-4kR_sR'_rg^2-2kg^3(R_s^2+(X_s+X'_r)^2)=\frac{3pU_s^2}{\omega_s}gR'_r$$

$$kg^4(R_s^2+(X_s+X'_r)^2)+2kg^3(R_sR'_r-R_s^2-(X_s+X'_r)^2)+kg^2(R_s^2+(X_s+X'_r)^2+R_r'^2-4R_sR'_r)$$

$$g(2kR_sR'_r-2kR_r'^2-\frac{3pU_s^2}{\omega_s}R'_r)+R_r'^2=0$$

$$g^4(R_s^2+(X_s+X'_r)^2)+2g^3(R_sR'_r-R_s^2-(X_s+X'_r)^2)+g^2(R_s^2+(X_s+X'_r)^2+R_r'^2-4R_sR'_r)$$

$$g(2R_sR'_r-2R_r'^2-\frac{3pU_s^2}{k\omega_s}R'_r)+R_r'^2=0$$

$$g^4(4+100)+2g^3(10-4-100)+g^2(4+100+25-40)$$

$$g(20-50-\frac{6\times300^2}{57.7\times100\pi}5)+25=0$$

$$104g^4+188g^3+89g^2-179g+25=0$$

Cette équation admet comme solution g=0.147.

b)- Calcul du couple de charge

$$C_r=57.7(1-g)^2=57.7(1-0.147)^2=41.98\,Nm$$

c) Calcul de la vitesse de rotation du moteur

$$N=(1-g)N_s=(1-0.147)\times1500=1279.5\ tr/\min$$

d)- Calcul de la valeur efficace du courant de ligne

Le courant $\bar{I}'_r$ est calculé par :

$$\bar{I}'_r==\frac{300}{2+\frac{5}{0.147}+j(5+5)}=\frac{300}{36.014+j10}=7.734-j2.147\quad(A)$$

Le courant $\bar{J}_m$ est calculé par :

$$\bar{J}_m=\frac{\bar{U}_s}{jX_m}=\frac{300}{j80}=-j3.75\ \ (A)$$

Le courant $\overline{J}_s$ est calculé par :

$$\overline{J}_s = \overline{J}'_r + \overline{J}_m = 7.734 - j2.147 - j3.75 = 7.734 - j5.897 = 9.726\angle -37,33° \quad (A)$$

La valeur efficace du courant de ligne est :

$$I_s = \sqrt{3} \times J_s = \sqrt{3} \times 9.726 = 16.84\ A$$