Chapitre 02 : Rappels mathématiques

1. Les vibrations :

Un système mécanique est dit en vibration lorsqu'il est animé d'un mouvement de va-et-vient rapide autour d'une position moyenne appelée « position d'équilibre ».

La transmission du mouvement vibratoire peut se faire soit au travers d'un gaz (généralement de l'air) ou d'un fluide (eau, huile…), soit au travers d'une matière solide comme la structure d'une machine, ses paliers, ses rotors ou encore la tuyauterie qui lui est associée… Lorsque la transmission se fait par

l'air ou par un fluide, on parle de sons (ou ultrasons au-delà d'une fréquence de 20 000 Hz), et on a coutume de parler de vibrations lorsqu'elle se propage par conduction au travers des composants métalliques de la machine.

L'exemple le plus simple d'un système en vibration est sans doute donné par le mouvement d'une masselotte suspendue à un ressort et relâchée après traction.

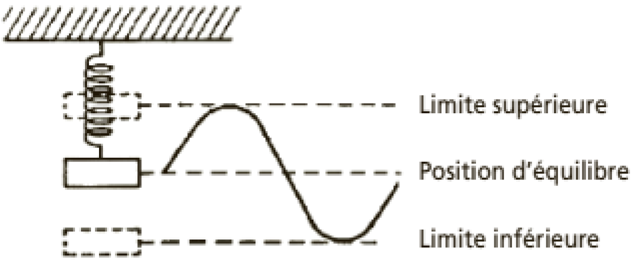


Figure 2.1. Système masse-ressort

Cet exemple (figure 1.1) montre que si le mouvement est entretenu par une force d'excitation périodique :

- la masselotte oscille entre des limites supérieures et inférieures, et l'écart entre chacune de ces limites et la position d'équilibre est appelé « amplitude ».
- la masselotte oscille autour de sa position d'équilibre un certain nombre de fois par seconde ou par minute. Ce nombre de cycles répétés à l'identique pendant une unité de temps s'appelle la « fréquence » et, à l'inverse, la durée du cycle s'appelle la « période ». Si la masselotte revient trois fois par seconde à sa position initiale, elle accomplira trois cycles par seconde, la fréquence du mouvement sera de trois Hertz (3 Hz) et sa période de 1/3 de seconde ou 333,333 ms.

À noter que le mouvement peut être entretenu par une impulsion périodique ou par une impulsion purement aléatoire. Dans ce dernier cas, la fréquence apparente sera donnée par la réponse du système mécanique et tributaire de sa capacité d'amortissement (fréquence de résonance du système).

Une autre caractéristique importante des vibrations sera donnée par le rapport qui existe entre l'amplitude A du mouvement vibratoire et la durée de son cycle, c'est-à-dire sa périodicité T. Ce rapport A/T donnera en effet une indication intéressante sur la nature et le caractère plus ou moins brutal du phénomène générateur, traduisant selon qu'il sera faible ou important, soit un effort continu comme la force centrifuge exercée par un balourd, soit un choc impulsif généré par exemple par un écaillage sur une denture ou sur la piste d'un roulement.

Par analogie à cet exemple proche de nos machines qui ont toute une masse et une certaine élasticité structurelle, nous pouvons dire qu'une vibration se caractérise principalement par son amplitude, sa fréquence et la nature des forces qui l'animent.

2. La fréquence

La fréquence représente la cadence de répétition d'un phénomène ou le nombre de fois qu'il se reproduit en un temps donné. Lorsque l'unité de temps choisi est la seconde, la fréquence s'exprime en Hertz (Hz).

Une vibration qui se produira 50 fois/seconde aura donc une fréquence de 50 Hz.

1 Hertz = 1 cycle par seconde

2.1. Relation entre fréquence et période

Le Hertz est la fréquence d'un phénomène dont la période est d'une seconde. Si la fréquence (f) d'un phénomène est de 50 Hertz, c'est-à-dire 50 cycles par seconde, la durée d'un cycle (ou période T) est de 1/50e de seconde soit 20 ms.

La fréquence f est donc l'inverse de la période T.

$$f = \frac{1}{T}$$

Sur les machines tournantes industrielles, on utilise souvent le tour par minute pour exprimer une vitesse de rotation, parfois noté CPM (cycle par minute) ou RPM (rotation par minute).

$$1Hz = \frac{1\ CPM}{60} = \frac{1\ RPM}{60} = \frac{1\ tr/\min}{60}$$

3. Amplitude

L’amplitude est la première sensation ressentie lorsque l’on pose la main sur le palier d’une machine qui vibre.

On appelle amplitude d’un mouvement vibratoire la valeur de ses écarts par rapport à sa position d’équilibre.

De cette définition générale, la complexité d’un signal vibratoire réel conduit à définir plusieurs grandeurs (figure 2.2) pour caractériser son amplitude.

- Dans le cas d’une vibration sinusoïdale (induite par exemple par un balourd), les amplitudes crête, crête à crête et efficace sont liées par les relations suivantes :

$$A_{eff} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_c = 0.707 A_c$$

$$A_{cc} = 2\sqrt{2} A_{eff} = 2.828 A_{eff}$$

Dans le cas d’un signal vibratoire complexe, il n’existe pas de relations mathématiques liant les valeurs crête et efficace. Ces trois grandeurs, dont deux ne peuvent donc se déduire l’une de l’autre, devront donc être mesurées ou calculées simultanément par l’appareil de mesure suivant les formules :

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \qquad A_c = \sqrt{max[x^2(t)]} \qquad A_{cc} = max[x(t)] - min[x(t)]$$

Avec :

- max [x(t)] : amplitude instantanée la plus élevée atteinte par le signal pour la période d’observation T
- min [x(t)] : amplitude instantanée la plus faible atteinte par le signal pour la période d’observation T
- x(t) : fonction représentative du signal.

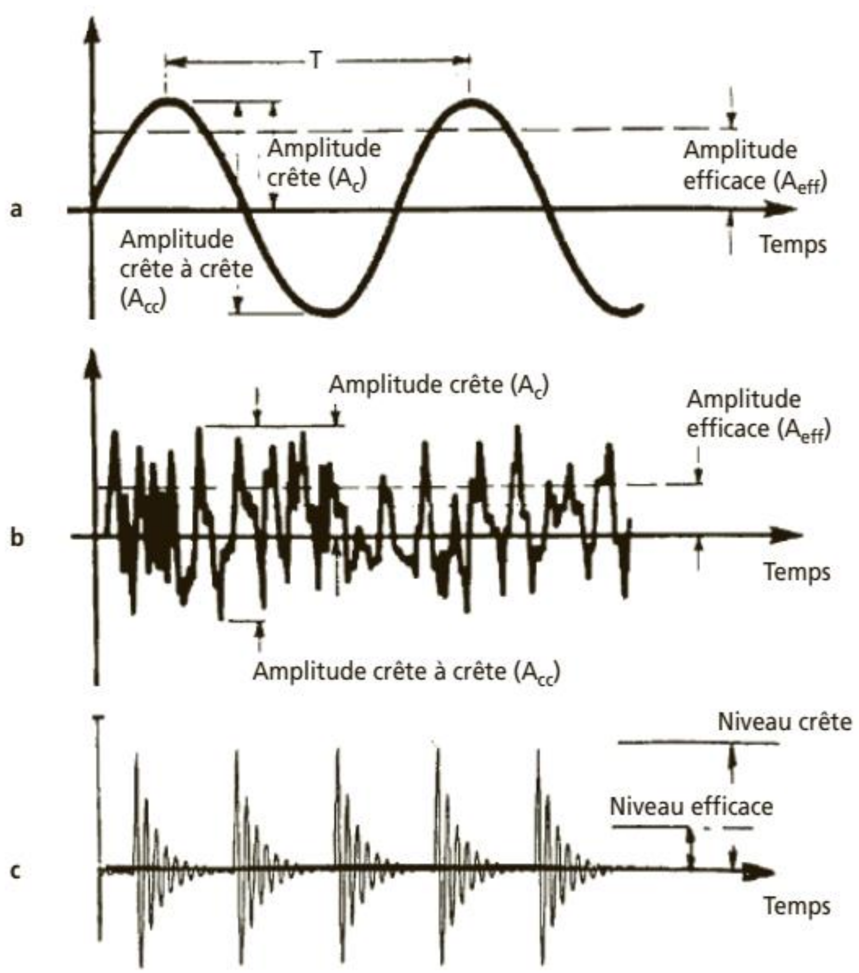


Figure 2.2. Représentation des différentes amplitudes caractéristiques dans le cas d'un signal sinusoïdal (en a), complexe (en b), impulsionnel périodique (en c)

Parce que les amplitudes crête ou crête à crête représentent mieux l'ampleur d'un mouvement ponctuel, elles seront généralement choisies pour détecter un phénomène aléatoire ou peu répétitif. En revanche, l'amplitude efficace, mieux représentative de l'énergie dispensée par le mouvement vibratoire permettra de mieux détecter les phénomènes périodiques et d'effectuer leur suivi notamment lorsqu'ils sont de faible ampleur face à l'environnement.

D'autre part, la connaissance simultanée de l'amplitude crête d'un signal et de son amplitude efficace donne une idée de la forme du signal, donc du type de vibration génératrice. La prise en compte de cette donnée utilisée sous des formes plus ou moins élaborées dans la définition d'un certain nombre d'indicateurs tels le facteur crête et le kurtosis permet souvent de façon simple la détection et la surveillance de phénomènes de type impulsionnel.

3.1. Les trois grandeurs représentatives de l'amplitude

Si nous reprenons l'exemple du système mécanique précédent, on constate (figure 2.3) que le mouvement de la masselotte se traduit par :

- **Un déplacement**. La position de la masselotte varie de part et d'autre de la position d'équilibre, allant de la limite supérieure à la limite inférieure du mouvement.
- **Une vitesse** de déplacement. Cette vitesse sera nulle au point haut et au point bas du mouvement de la masselotte et sera maximale autour du point d'équilibre.
- **Une accélération**. Celle-ci permet à la masselotte de passer de sa vitesse minimale en début de course à sa vitesse maximale au point d'équilibre avant de décélérer en fin de course.

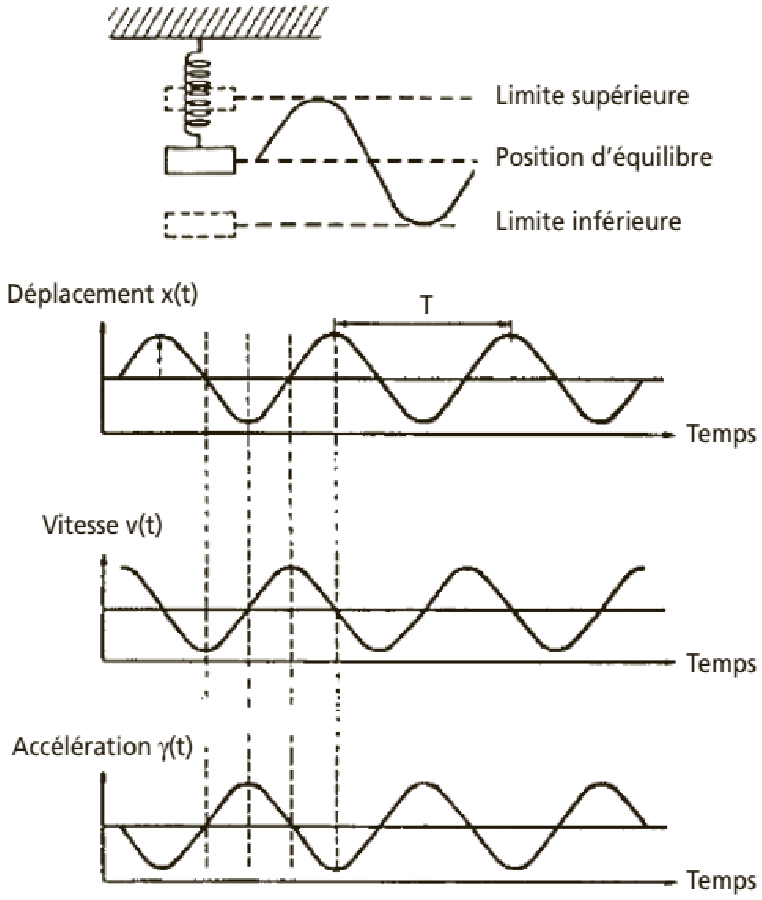


Figure 2.3. Représentations du mouvement d'un système masse-ressort

selon les grandeurs cinématiques considérées

On constate qu'il existe une relation très simple entre les amplitudes de déplacement D, de vitesse V, d'accélération A et la pulsation ω :

$$A = \omega V = \omega^2 D$$

Les gammes de mesure pour chaque descripteur sont représenter dans le tableau suivant :

Descripteur de vibration	Gamme de fréquence	Exemples
Déplacement	2 à 100 Hz	déséquilibre, déformation, désalignement, desserrage…
Vitesse	2 à 3000 Hz	fréquence de passage des pales d'un ventilateur ou des aubes d'une pompe, engrènement sur un réducteur, défauts de roulements dans le cas d'écaillages localisés…
Accélération	2 à 20000 Hz	engrènement sur un multiplicateur, passage d'encoches sur un moteur…

4. Relations forces/vibration

Une force sinusoïdale peut être représentée comme la projection, sur un axe, d'une force centrifuge d'amplitude constante A tournant à une vitesse angulaire constante ω (ω = 2 πf) (figure 2.4).

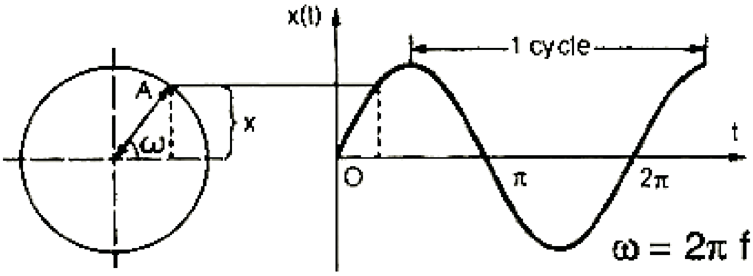


Figure 2.4. Force sinusoïdale

La rotation du vecteur A entraîne une variation sinusoïdale de sa projection x, répondant à la relation :

$$x(t) = Asin(\omega t)$$

avec : ω = 2 π N/60 = 2 π f, la relation devient :

$$x(t) = Asin(\pi f t)$$

Considérons (figure 2.5) une masselotte de masse m reposant sur un support élastique de raideur k et d'amortissement c :

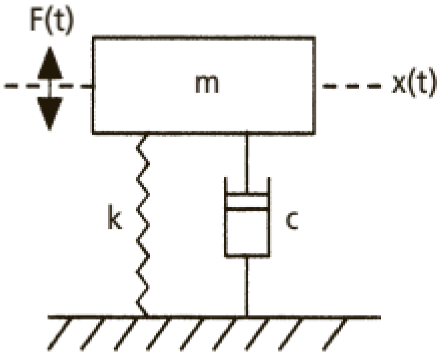


Figure 2.5. Système masse ressort à un degré de liberté

La fréquence propre du système hors amortissement est donnée par la formule :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Avec f_0 : Fréquence propre du système non amorti

m : La masse en mouvement

k : Le coefficient de raideur du système

Si le système est excité par une force d'excitation sinusoïdale dont l'amplitude est maintenue constante et dont on fait varier la fréquence, l'amplitude du déplacement de la masselotte augmente rapidement, passe par un maximum puis décroît. La fréquence f_r pour laquelle l'amplitude du mouvement est maximale est appelée fréquence de résonance. Sa valeur dépend de la fréquence propre du système définie plus haut et du facteur ξ d'amortissement dépendant de l'amortisseur c et de la masse du système m.

$$f_r = f_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Avec :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Avant la résonance, le déplacement et la force d'excitation sont en phase, c'est-à-dire qu'ils ont leur amplitude maximum en même temps. Après la résonance, ils seront en opposition de phase.

5. Notions de modulations

Certains défauts peuvent se manifester par deux types de modulations.

5.1. Modulations d'amplitude

Un organe de machine peut être soumis à des efforts dont l'amplitude varie de manière périodique. C'est le cas par exemple pour un réducteur des efforts d'engrènement, efforts qui augmentent et diminuent à chaque tour de l'arbre si ce dernier est excentré ou déformé.

L'effort principal d'engrènement est modulé à chaque tour par l'effort supplémentaire imprimé par la déformation de l'arbre qui modifie le jeu d'engrènement et la pression exercée sur chaque dent en prise. L'amplitude du signal vibratoire induit par l'engrènement est une fonction périodique du temps, et on dit alors que ce signal est modulé en amplitude (figure 2.6).

Modulation d'amplitude = variation périodique des forces dynamiques

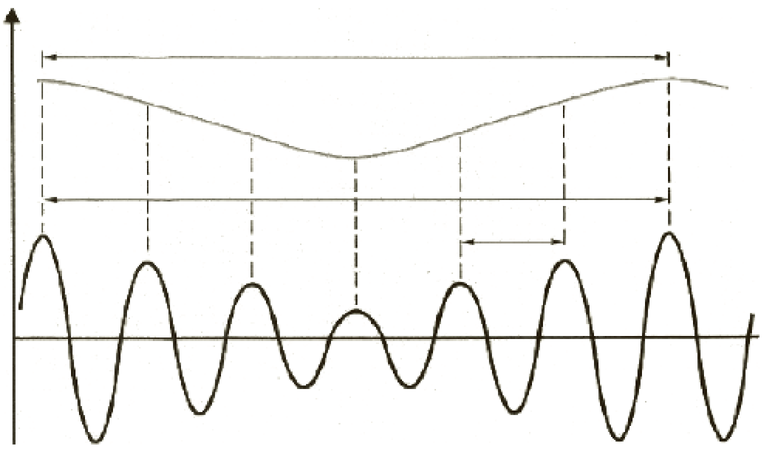


Figure 2.6. Modulation d'amplitude

5.2. Modulations de fréquence

De même, des jeux d'accouplement et de clavette, des écaillages de denture, des ruptures de barres rotoriques de moteurs…, entraînent des variations de la vitesse de rotation instantanée des lignes d'arbres affectées par ce défaut et, donc, des variations de fréquence des composantes caractéristiques liées à ces dernières (fréquence de passage des encoches, fréquence d'engrènement, fréquence d'accouplement…). Les fréquences de ces composantes deviennent des fonctions périodiques du temps. On dit que ces composantes sont modulées en fréquence.

Modulation de fréquence = microvariation périodique de la vitesse de rotation

6. Notion de phases

Les efforts qui causent les vibrations ne se produisent pas forcément au même moment sur tous les points de la machine. Ainsi, un défaut de balourd va-t-il répartir son effet maximum pendant la durée d'un tour en tous points de la circonférence d'un palier et entre deux mesures, l'une effectuée sur un point vertical et l'autre sur un point horizontal, le décalage du point haut de la vibration sera voisin d'un quart de tour ou de 90°.

On appelle déphasage cet écart de temps ou cet écart angulaire entre deux événements d'un même signal ou deux signaux d'un même évènement mesurés en des points différents. On dira que les deux événements sont en phase (ou de déphasage nul) lorsque les deux évènements se produiront en même temps et qu'ils sont déphasés lorsqu'ils seront décalés.

Les écarts donnés par ce déphasage permettent d'affiner un diagnostic et peuvent permettre à des spécialistes d'orienter des opérations d'équilibrage, de diagnostiquer des défauts de type fissurations d'ancrages ou de distinguer la position relative de deux phénomènes.

7. Représentation d'un signal

7.1. Représentation temporelle

Le signal vibratoire délivré par un capteur peut être représenté de différentes façons. La première qui vient à l'esprit est la représentation de chaque évènement en fonction de sa progression dans le temps (représentation temporelle).

Cette représentation est d'ailleurs utilisée pour suivre le comportement vibratoire d'une machine en fonction de ses paramètres de fonctionnement pour l'étude, par exemple, du comportement vibratoire d'un compresseur à pistons sur un cycle de compression. Elle sert aussi, et de façon très pertinente, à l'élaboration d'un diagnostic pointu lorsque, après dépistage d'une anomalie, il sera possible, grâce à des analyseurs de signaux haut de gamme, de suivre le signal temporel filtré autour de la fréquence générée par le défaut.

Ce type de représentation temporelle est aisé à exploiter lorsque le signal délivré par le capteur est simple (par exemple, signal délivré par un capteur de proximité représentant le déplacement relatif d'un arbre dans son palier (vibration de type sinusoïdal induite par le balourd du rotor)…). Il est encore facile à exploiter lorsque ce signal a fait l'objet d'un traitement approprié (filtrage, moyennage synchrone), mais il devient hélas vite inextricable lorsque le signal a pour origine des sollicitations multiples (figure 2.7).

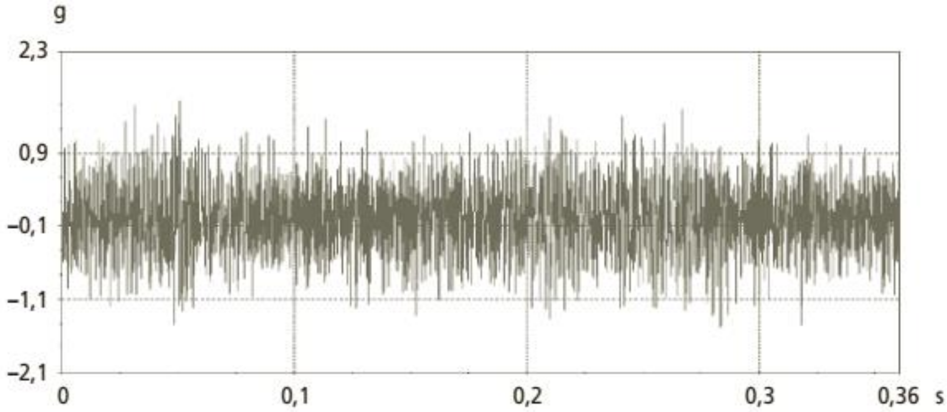
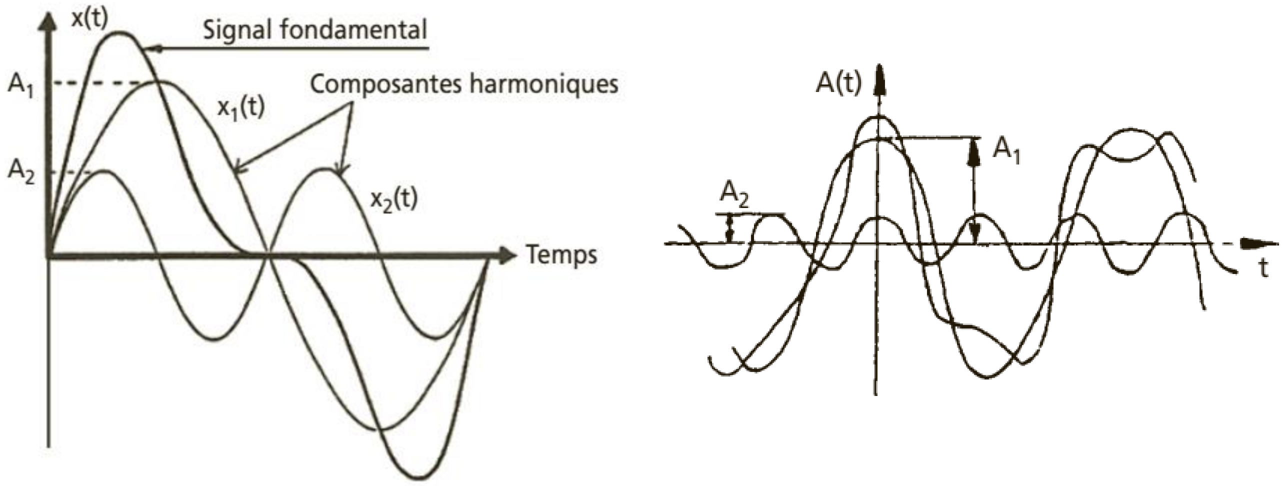


Figure.2.7. Signal temporel « brut » délivré par un accéléromètre fixé sur un des paliers MV d'un réducteur

Pour qu'il puisse être plus facilement interprété, le signal doit donc généralement être décomposé en différentes composantes sinusoïdales élémentaires.

Si cette décomposition est théoriquement possible par filtrages successifs, sa représentation dans le domaine temporel deviendrait vite trop foisonnante (figures 2.8), donc inexploitable.



(a) **(b)**

Figure 2.8. Décomposition de deux signaux temporels en ses deux composantes harmoniques

7.2. Représentation en fonction de la fréquence (représentation spectrale)

Faute de pouvoir représenter le signal vibratoire en fonction du temps sous une forme facilement exploitable, on a recherché à le représenter dans un diagramme amplitudes/fréquences appelé spectre.

La transformée de Fourier, lorsqu'elle s'applique à une fonction du temps comme l'accélération, la vitesse ou le déplacement, donne pour résultat une autre fonction dont la variable est la fréquence.

Avec ce type de représentation, chacune des composantes sinusoïdales élémentaires constituant le signal est parfaitement définie par son amplitude et sa fréquence. La représentation spectrale du signal en figure 2.8 (b) devient ainsi plus claire et facilement exploitable (figure 2.9).

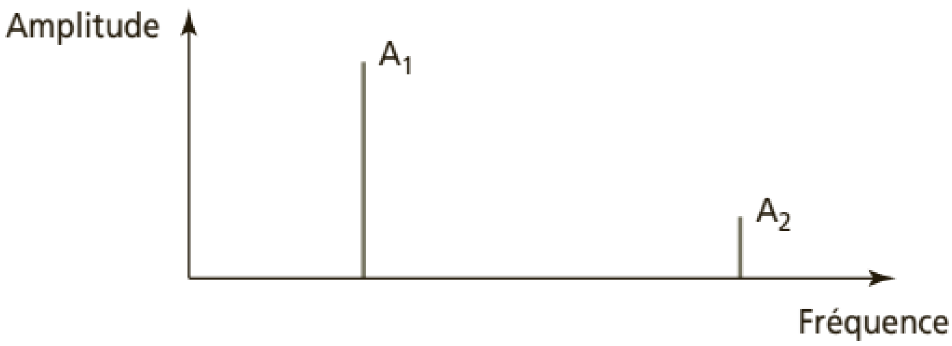


Figure 2.9. Représentation spectrale des différentes composantes du signal donné en figure 2.8 (b)

La simplification apportée par ce type de représentation et la décomposition du signal en composantes sinusoïdales élémentaires (analyse spectrale) sont illustrées par les figures 2.10.

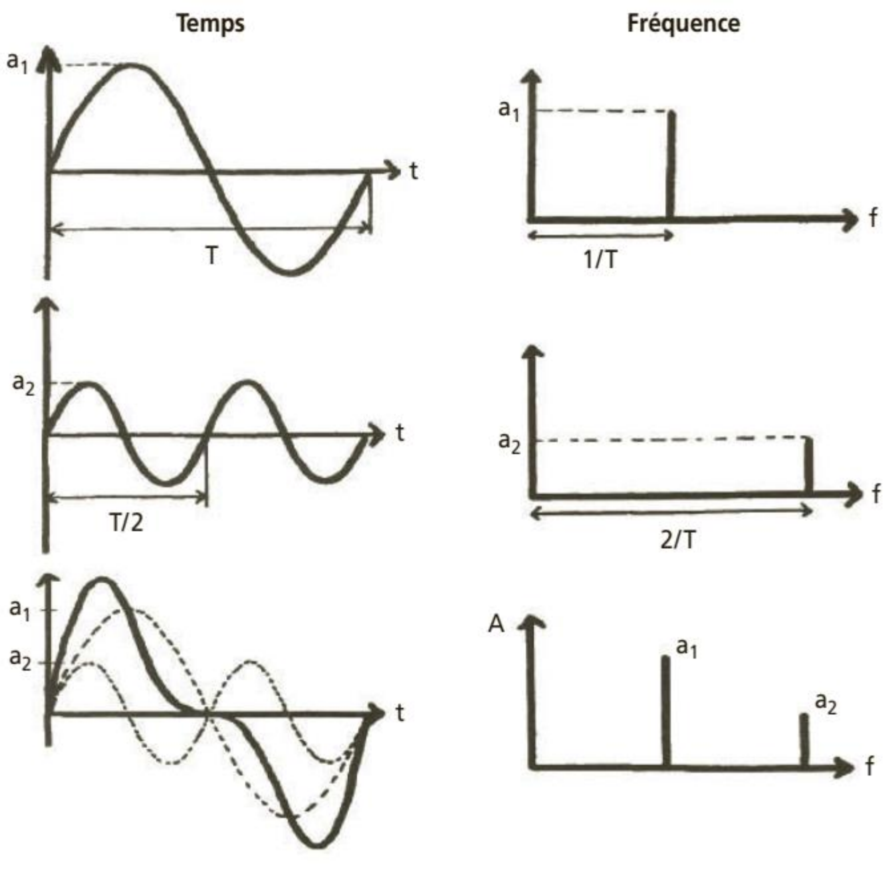


Figure 2.10. Exemples de conversion temps/fréquences d'un signal temporel

7.3. Intérêt pratique de l'analyse spectrale

Toute anomalie affectant une machine tournante (balourd, désalignement, phénomène de tourbillon d'huile, déformation d'arbre, jeu excessif, desserrage de palier, défaut de roulement ou d'accouplement, anomalie électromagnétique affectant le rotor ou le stator d'un moteur, engrènement défectueux…) se traduit par des vibrations dont les fréquences correspondent aux fréquences fondamentales des forces qui les induisent et à leurs harmoniques (harmonique : composante dont la fréquence est un multiple d'une fréquence de base appelée fréquence fondamentale). La connaissance de la cinématique de la machine permet, sinon d'identifier l'anomalie, tout au moins de la localiser, de suivre l'évolution des amplitudes des vibrations qu'elle induit et, de ce fait, d'en apprécier la gravité.

Un spectre est un graphe dans lequel sont représentées les amplitudes et les fréquences de toutes les composantes vibratoires induites par le fonctionnement d'une machine. Chaque composante est représentée par un segment vertical appelé raie dont l'abscisse représente la fréquence et l'ordonnée l'amplitude. L'interprétation d'un spectre consiste dans un premier temps à trouver l'origine cinématique de chaque composante ou famille de composantes constituant le signal.

L'interprétation d'un spectre sera d'autant plus précise et pertinente que le diagnosticien sera en possession d'un maximum de renseignements concernant les conditions d'exploitation, les principes de fonctionnement, les modes de vieillissement et surtout la cinématique de la machine.

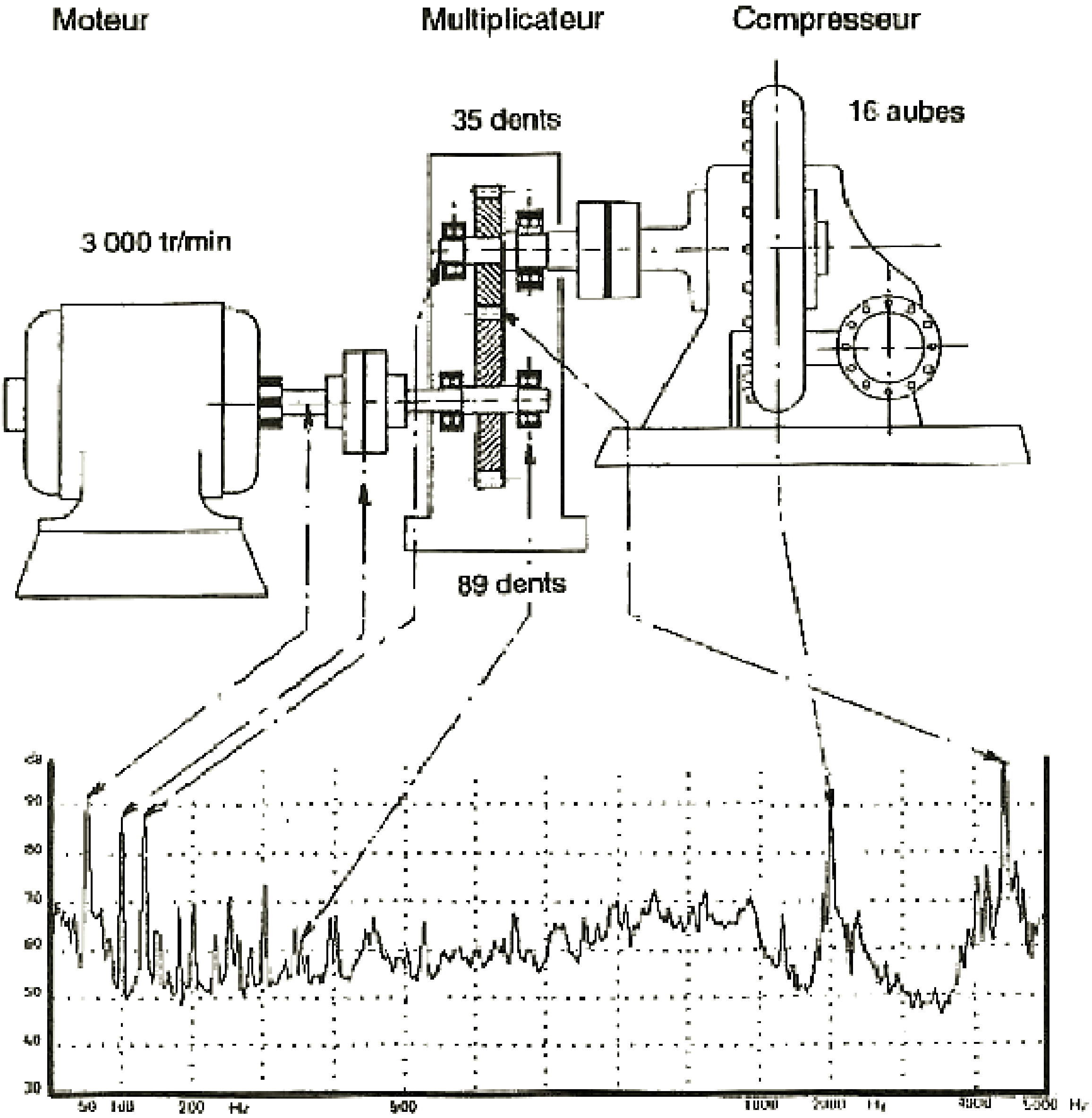
Exemple

Sur le spectre associé au moto compresseur de la figure 2.11, nous notons qu'une raie d'amplitude élevée dont la fréquence est de 50 Hz (3 000 cycles par minute) correspond à la fréquence de rotation du moteur ou du premier arbre du multiplicateur ; une augmentation notable de l'amplitude de cette composante traduirait une anomalie au niveau de cette ligne d'arbres, vraisemblablement un déséquilibre du rotor.

De même, une raie à 100 Hz (deux fois la fréquence de rotation) est représentatif de l'état d'alignement de l'arbre du moteur ou d'un défaut électromagnétique ; la raie à 4450 Hz correspond à la fréquence d'engrènement du multiplicateur.

L'analyse de cette composante et des bandes latérales qui lui sont associées et l'étude de leurs évolutions permettront de statuer sur l'état de ce train d'engrenages.

Cet exemple montre la densité des renseignements que l'on peut tirer de l'analyse d'un spectre. Les informations seront d'autant plus riches que la résolution du spectre sera plus fine.



Fréquence (Hz)	Interprétation
50	Rotation du moteur (fréquence fondamentale)
100	Alignement moteur multiplicateur
127,1	Rotation du compresseur
352	Fréquence de passage des billes sur la piste du roulement
2034	Effet d'aubes du rotor du compresseur
4450	Engrènement roue/pignon du multipicateur

Figure 2.11. Exemple d'interprétation d'un spectre