1.6 Espaces de Sobolev homogènes

Définition 1.6 *On définit l'espace de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} < +\infty.$$

Comme dans le non homogène, voir section 1.1, voici quelques propriétés :

(i) $\| - \|_{\dot{H}^s}$ est une norme.

(ii) $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.12 *Si $s_0 < s < s_1$ alors $\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ où $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ avec $0 < \theta < 1$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec $p := 1/(1-\theta)$ et $p' := 1/\theta$. ■

Proposition 1.13 *L'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est de Hilbert ssi $s < n/2$.*

Preuve. Soit (f_k) une suite de Cauchy dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Il vient dons que la suite $(\widehat{f_k})$ est de Cauchy dans $L_2(|\xi|^2 d\xi)$. Il existe alors une fonction $u \in L_2(|\xi|^2 d\xi)$, telle que $\widehat{f_k} \to u$ dans $L_2(|\xi|^2 d\xi)$.
Par Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_{|\xi|\le 1} |u(\xi)| \mathrm{d}\xi \le \Big(\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{2s}|u(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}\Big(\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{-2s}\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2},$$

et $\int_{|\xi|\le 1} |\xi|^{-2s}\mathrm{d}\xi$ converge dès que $s < n/2$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\ge 1} (1+|\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi &\le 2^s \int_{|\xi|\ge 1} |\xi|^{2s}|u(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\ &= 2^s \|u\|^2_{L_2(|\xi|^2 d\xi)}.\end{aligned}$$

Alors u est une distribution tempérée, on pose $f := \mathcal{F}^{-1}u$, et on obtient $f_k \to f$ dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. ■

On rappel l'espace des distributions tempérées modulo les constantes $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$, voir la section 1.3.

Proposition 1.14 *Soit $s \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$, un nombre paire. Alors $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est bien définit sur $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$, et on a pour toute $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ et tout $c \in \mathbb{C}$*

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \|f + c\|_{\dot{H}^s}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la fonction $\xi \to |\xi|^s$ est de class C^∞, alors on utilise l'égalité

$$\langle |\xi|^s \delta, \varphi\rangle = 0$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ■