Exercice N° 1:
Localiser dans le plan des z toutes les singularités de chacune des fonctions suivantes :

$$\frac{z^3}{(z+1)^3} \quad ; \frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)} \; ; \; \frac{sinmz}{z^2+2z+2} \; ; \; \frac{1-cosz}{z}$$

Solution :

- La fonction $\frac{z^3}{(z+1)^3}$ a un point singulier en $z_0 = -1$
- La fonction $\frac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$a trois points singuliers en $z_1 = 4\,, z_2 = i \; et \; z_3 = 1 - 2i$
- La fonction $\frac{sinmz}{z^2+2z+2}$a trois points singuliers en $z_1 = -1 + i\,, et \;\; z_2 = -1 - i$
- La fonction_ $\frac{1-cosz}{z}$ *a* une fausse singularité *en* $z_0 = 0$ puisque $\lim_{z\to 0}\frac{1-cosz}{z} = 0$ existe

Exercice N° 2: Chercher la série de Laurent autour du point singulier indiqué pour chacune des fonctions suivantes, et préciser la nature de la singularité dans chaque cas :

1. $\frac{sinz}{z-\pi} \qquad z_0 = \pi$
2. $zcos\, {}^1\!/_z \qquad z_0 = 0$
3. $\frac{z}{(z+1)(z+2)} \qquad z_0 = -1$
4. $\frac{1}{z(z+2)^3} \qquad z_1 = 0 \; et \; z_2 = -2$

Solution :

1. La série de Laurent de la fonction $f_1(z) = \frac{\text{sinz}}{\text{z}-\pi} \quad en \;\; z_0 = \pi$

On pose $t = z - \pi \Rightarrow z = t + \pi$

Par la suit on trouve que $f_1(t) = \frac{\sin(t+\pi)}{t} = -\frac{\sin t}{t}$

Et on a le développement de $\sin t$ est donné par :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

$$f_1(t) = -\frac{\sin t}{t} = \; -1 + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + \frac{t^6}{7!} + \cdots$$

Finalement on trouve :

$$f_1(z) = \underbrace{-1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \frac{(z-\pi)^6}{7!} + \cdots}_{Partie\ analytique}$$

On remarque qu'il n'y a pas de partie principale alors $z_0 = \pi$ est une fausse singularité.

2. La série de Laurent de la fonction $f_2(z) = zcos\frac{1}{z}$ en $z_0 = 0$

On pose $t = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{t}$

Par la suit on trouve que $f_2(t) = \frac{\cos \mathrm{t}}{\mathrm{t}}$

Et on a le développement de $\cos t$ est donné par :

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$f_2(t) = \frac{\cos \mathrm{t}}{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{t}} - \frac{t}{2!} + \frac{t^3}{4!} - \frac{t^5}{6!} + \cdots$$

$$\cdots$$

Finalement on trouve :

$$f_2(z) = \underbrace{\mathrm{z}}_{\mathrm{P.Anlytique}} \underbrace{- \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \cdots}_{Partie\ principale}$$

On remarque que la partie principale est infinie alors la fonction $f_2(z) = zcos\frac{1}{z}$ a un point singulier essentiel en $z_0 = 0$

3. La série de Laurent de la fonction $f_3(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ $en\ z_1 = -1$

On pose $t = z + 1 \Rightarrow z = t - 1$

Par la suit on trouve que $f_3(t) = \frac{t-1}{t(t+1)}$

Et on a le développement de $\frac{1}{t+1}$ est donné par :

$$\frac{1}{t+1} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 + \cdots$$

$$f_3(t) = \frac{t-1}{t(t+1)} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \times (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 + \cdots)$$

$$f_3(t) = -\frac{1}{t} + 2 - 2t + 2t^2 - 2t^3 + 2t^4 - 2t^5 + 2t^6 + \cdots$$

Finalement on trouve :

$$f_3(z) = \underbrace{-\frac{1}{z+1}}_{Partie\ principale} + \underbrace{2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + 2(z+1)^4 + \cdots}_{\text{P.Anlytique}}$$

4. Pour la fonction $f_4(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$

- La série de Laurent Pour le pôle $z_1 = 0$

$$f_4(z) = \frac{1}{2^3 z \left(\frac{z}{2}+1\right)^3}$$

On pose $t = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 2t$

Par la suit on trouve que $f_4(t) = \frac{1}{16t(t+1)^3}$

Et on a le développement de $\frac{1}{(t+1)^3}$ est donné par :

$$\frac{1}{(t+1)^3} = 1 - 3t + 6t^2 - 10t^3 + 15t^4 + \cdots$$

$$f_4(t) = \frac{1}{16t(t+1)^3} = \left(\frac{1}{16t}\right) \times (1 - 3t + 6t^2 - 10t^3 + 15t^4 + \cdots)$$

$$f_4(t) = \frac{1}{16t} - \frac{3}{16} + \frac{3}{8}t - \frac{5}{8}t^2 + \frac{15}{16}t^3 + \cdots$$

Finalement on trouve :

$$f_4(z) = \underbrace{\frac{1}{8z}}_{Partie\ principale} + \underbrace{-\frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + \frac{15}{128}z^3 + \cdots}_{\text{P.Anlytique}}$$

On remarque que la partie principale est finie$a_{-2} = 0$ alors la fonction $f_4(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ a un pôle simple en $z_1 = 0$

- La série de Laurent Pour le pôle $z_2 = -2$

On pose $t = z + 2 \Rightarrow z = t - 2$

Par la suit on trouve que $f_4(t) = \frac{1}{(t-2)t^3} = \frac{1}{(-2)t^3\left(1-\frac{t}{2}\right)}$

Et on a le développement de $\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)}$ est donné par :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)} = 1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^3}{2^3}+\frac{t^4}{2^4}+\frac{t^5}{2^5}\dots$$

$$f_4(t) = \frac{-2}{t^3\left(1-\frac{t}{2}\right)} = \left(\frac{1}{-2t^3}\right)\times\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^3}{2^3}+\frac{t^4}{2^4}+\frac{t^5}{2^5}\dots\right)$$

$$f_4(t) = -\frac{1}{2t^3}-\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{8t}-\frac{1}{16}-\frac{t}{2^5}-\frac{t^2}{2^6}-\frac{t^3}{2^7}\dots\dots$$

Finalement on trouve :

$$f_4(z) = \underbrace{-\frac{1}{2(z+2)^3}-\frac{1}{4(z+2)^2}-\frac{1}{8(z+2)}}_{Partie\ principale}\underbrace{-\frac{1}{2^4}-\frac{(z+2)}{2^5}-\frac{(z+2)^2}{2^6}+\frac{(z+2)^3}{2^7}\dots}_{\text{P.Anlytique}}$$

On remarque que la partie principale est finie$a_{-4} = 0$ alors la fonction $f_4(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$a un pôle triple (d'ordre 3) en $z_2 = -2$

Exercice N° 3: Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, aux pôles indiqués :

1. $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ $\quad z_i = \ 2; i; -i$
2. $\frac{1}{z(z+2)^3}$ $\quad z_1 = 0\ et\ z_2 = -2$
3. $\frac{ze^{iz}}{(z-3)^2}$ $\quad z_0 = 3$
4. $\frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2}$

Solution :

1. La fonction $f_1(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ a trois pôles simples en $z_1 = \ 2;\ z_2 = i; et\ z_3 = -i$

on utilise la relation :

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

Alors on trouve :

- ✓ $Res(f_1(z), 2) = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to 2}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)}\right] = \frac{4}{5}$
- ✓ $Res(f_1(z), i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z-2)(z+i)}\right] = \frac{1-2i}{10}$

- ✓ $Res(f_1(z),-i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\times\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to -i}\left[\frac{z^2}{(z-2)(z-i)}\right] = \frac{1+2i}{10}$

2. La fonction $f_2(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ a deux pôles : un pôle simples en $z_1 = 0$; et un pôle triple en $z_2 = -2$

✓ Le résidu de $f_2(z)$ au pôle simple $z_1 = 0$:

$$Res(f_2(z),0) = \lim_{z\to 0}\left[(z)\times\frac{1}{z(z+2)^3}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{(z+2)^3}\right] = \frac{1}{8}$$

✓ Le résidu de $f_2(z)$ au pôle triple $z_2 = -2$,

on utilise la relation :

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$Res(f_2(z),-2) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+2)^3\times\frac{1}{z(z+2)^3}\right] = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{-1}{8}$$

3. La fonction $f_3(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-3)^2}$ a un pôle double en $z_0 = 3$

Le résidu d'une fonction f au un pôle double est donné par la relation :

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 f(z)]$$

$$Res(f_3(z),3) = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left[(z-3)^2\times\frac{ze^{iz}}{(z-3)^2})\right] = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left[ze^{iz}\right] = (1+3i)e^{3i}$$

4. La fonction $f_4(z) = \frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2} = \frac{z^2-2z}{(z+2i)(z-2i)(z+1)^2}$ a trois pôles : deux pôles simples en $z_1 = 2i;\ et\ z_2 = -2i$ et un pôle double en $z_3 = -1$

✓ Le résidu de $f_4(z)$ au pôle simple $z_1 = 2i$:

$$Res(f_4(z),2i) = \lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\times\frac{z^2-2z}{(z+2i)(z-2i)(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to 2i}\left[\frac{z^2-2z}{(z+2i)(z+1)^2}\right] = \frac{1}{25}(7+i)$$

✓ Le résidu de $f_4(z)$ au pôle simple $z_2 = -2i$:

$$Res(f_4(z),-2i) = \lim_{z\to -2i}\left[(z+2i)\times\frac{z^2-2z}{(z+2i)(z-2i)(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to -2i}\left[\frac{z^2-2z}{(z-2i)(z+1)^2}\right] = \frac{1}{25}(7-i)$$

✓ Le résidu de $f_4(z)$ au pôle triple $z_3 = -1$:

$$Res(f_4(z),-1) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\times\frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-2z}{(z^2+4)}\right] = \frac{-4}{25}$$

Exercice N° 4 :

Reprendre les fonctions de l'exercice 3 et calculer les intégrales $\oint_C f(z)dz$
Le long des courbes C définies par

1. $|z| = \frac{3}{2}$
2. $|z| = 4$

Solution :

On applique Le théorème des résidus :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

1. Pour le cercle $C'\colon |z| = \frac{3}{2}$, la fonction $f_1(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ a trois pôles simples en $z_1 = 2;\ z_2 = i; et\ z_3 = -i$, seulement $z_2 = i; et\ z_3 = -i$ sont à l'intérieur de C', alors :

$$I'_1 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}dz = 2\pi i \times \left(Res(f_1(z), i) + Res(f_1(z), -i)\right) = 2\pi i \left(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10}\right) = \frac{2\pi i}{5}$$

- Pour le cercle $C''\colon |z| = 4$, tous les pôles sont à l'intérieur de C'', alors :

$$I''_1 = \oint_{|z|=4} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}dz = 2\pi i \times \left(Res(f_1(z), i) + Res(f_1(z), -i) + Res(f_1(z), 2)\right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10} + \frac{4}{5}\right) = 2\pi i$$

2. Pour le cercle $C'\colon |z| = \frac{3}{2}$, la fonction $f_2(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ a deux pôles en $z_1 = 0; et\ z_2 = -2$, seulement $z_1 = 0$ est à l'intérieur de C', alors :

$$I'_2 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z(z+2)^3}dz = 2\pi i \times \left(Res(f_2(z), 0)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{8}\right) = 4\pi i$$

- Pour le cercle $C''\colon |z| = 4$, tous les pôles sont à l'intérieur de C'', alors :

$$I''_2 = \oint_{|z|=4} \frac{1}{z(z+2)^3}dz = 2\pi i \times \left(Res(f_2(z), 0) + Res(f_2(z), -2)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = 0$$

3. Pour le cercle $C'\colon |z| = \frac{3}{2}$, la fonction $f_3(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-3)^2}$ a un pôle en $z_0 = 3$, mais il est à l'extérieur de C', alors :

$$I'_3 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{ze^{iz}}{(z-3)^2} dz = 0$$

- Pour le cercle $C''\colon |z| = 4$, le pôle est à l'intérieur de C'', alors :

$$I''_3 = \oint_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-3)^2} dz = 2\pi i \times \left(Res(f_3(z), 3)\right) = 2\pi i(1+3i)e^{3i}$$

4. Pour le cercle $C'\colon |z| = \frac{3}{2}$, la fonction $f_4(z) = \frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2}$ a trois pôles en $z_1 = 2i;\ z_2 = -2i;\ et\ z_3 = -1$, seulement $z_3 = -1$ est à l'intérieur de C', alors :

$$I'_4 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2} dz = 2\pi i \times \left(Res(f_4(z), -1)\right) = 2\pi i\left(\frac{-4}{25}\right) = -\frac{8\pi i}{25}$$

- Pour le cercle $C''\colon |z| = 4$, tous les pôles sont à l'intérieur de C'', alors :

$$I''_4 = \oint_{|z|=4} \frac{z^2-2z}{(z^2+4)(z+1)^2} dz = 2\pi i \times \left(Res(f_4(z), 2i) + Res(f_4(z), -2i) + Res(f_4(z), -1)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-4}{25} + \frac{1}{25}(7-i) + \frac{1}{25}(7+i)\right) = -\frac{20\pi i}{25}$$

<u>Exercice N° 5:</u> Calculer $\oint_C \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)} dz$ ou C est :

- le cercle $|z| = \frac{1}{2}$
- le cercle $|z| = \frac{3}{2}$
- le rectangle de sommets $-4+i, -4-i, 2+i, 2-i$

Solution :

La fonction $f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}$ a trois pôles simples en $z_1 = 0;\ z_2 = -1; et\ z_3 = -2$, on applique

Le théorème des résidus :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$$Res(f_1(z), 0) = \lim_{z\to 0}\left[(z) \times \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -0}\left[\frac{z-1}{(z+1)(z+2)}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$Res(f_1(z),-1) = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\times\frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{z-1}{z(z+2)}\right] = 2$$

$$Res(f_1(z),-2) = \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\times\frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -2}\left[\frac{z-1}{z(z+1)}\right] = -\frac{3}{2}$$

1. Pour le cercle $C' : |z| = \frac{1}{2}$, seulement$z_1 = 0$ est à l'intérieur de C',alors :

$$I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}dz = 2\pi i \times \left(Res(f(z),0)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

2. Pour le cercle $C' : |z| = \frac{3}{2}$, seulement$z_1 = 0$ et $z_2 = -1$ sont à l'intérieur de C', alors :

$$I_2 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}dz = 2\pi i \times \left(Res(f(z),0) + Res(f(z),-1)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+2\right) = \frac{3}{2}\pi i$$

3. le rectangle de sommets $-4+i, -4-i, 2+i, 2-i$tous les pôles sont à l'intérieur de C', alors :

$$I_3 = \oint_C \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}dz = 2\pi i \times \left(Res(f(z),0) + Res(f(z),-1) + Res(f(z),-2)\right)$$
$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Exercice N° 6: En utilisant le théorème des résidus, Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2}dx \, ; \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3sin\theta}$$

Solution :

- *Pour* $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

On a la fonction $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ une fonction paire $\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Posons $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

On fait $\lim_{R\to+\infty}$ $\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z^2-i)(z^2+i)} = \frac{1}{(z-\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+i\sqrt{i})}$ a 4 pôles simples :

en $z_1 = e^{i\pi/4}$; $z_2 = -e^{i\pi/4}$; $z_3 = e^{i3\pi/4}$ et $z_4 = -e^{i3\pi/4}$, seuls $z_1 = e^{i\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; et $z_3 = e^{i3\pi/4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ont des parties imaginaires positives ($z_1, et\ z_3 \in C([-R,+R]+\Gamma)$),Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left(Res\left(f, e^{i\pi/4}\right) + Res\left(f, e^{i\pi/4}\right)\right)$$

$$Res\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}}\left[\left(z - e^{i\pi/4}\right) \times \frac{1}{\left(z - e^{i\pi/4}\right)\left(z + e^{i\pi/4}\right)(z^2+i)}\right] = \frac{1-i}{4i\sqrt{2}}$$

$$Res\left(f, e^{i3\pi/4}\right) = \lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\left[\left(z - e^{i3\pi/4}\right) \times \frac{1}{\left(z - e^{i3\pi/4}\right)\left(z + e^{i3\pi/4}\right)(z^2-i)}\right] = \frac{1+i}{4i\sqrt{2}}$$

Par la suite on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left(\frac{1-i}{4i\sqrt{2}} + \frac{1+i}{4i\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

- *Pour* $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2} dx$

Posons $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+2z+2)(z^2+1)^2}$ en appliquant le théorème des résidus, et on choisit le contour C constitué d'un intervalle $[-R,R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{+R} f(x)dx+\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

On fait $\lim_{R\to+\infty}$ $\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0 \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+2z+2)(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z+1-i)(z+1+i)(z-i)^2(z+i)^2}$ a 2 pôles simples en $z_1=-1+i;\ et\ z_2=-1-i$; et 2 pôles doubles en $z_3=i\ et\ z_4=-i$, seuls $z_1=-1+i\ ;\ et\ z_3=i$ ont des parties imaginaires positives ($z_1, et\ z_3\in C([-R,+R]+\Gamma)$),Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2}dx=2\pi i\big(Res(f,-1+i)+Res(f,i)\big)$$

$$Res(f,-1+i)=\lim_{z\to-1+i}\left[(z+1-i)\times\frac{1}{(z+1-i)(z+1+i)(z^2+1)^2}\right]=\frac{-3+4i}{50i}$$

$$Res(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\times\frac{1}{(z^2+2z+2)(z-i)^2(z+i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+2z+2)(z+i)^2}\right]$$
$$=\frac{19-8i}{10i}$$

Par la suite on trouve

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2}dx=2\pi i\left(\frac{-3+4i}{50i}+\frac{19-8i}{100i}\right)=\frac{13\pi}{50}$$

- $I_3=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3sin\theta}$

on pose $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0,2\pi]$ et $z^{-1} = e^{-i\theta}$ alors on peut écrire :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$dz = ie^{i\theta} d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5 + 3\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5 + 3\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3}$$

soit $f(z) = \frac{2}{3z^2+10iz-3} = \frac{2}{3\left(z+\frac{i}{3}\right)(z+3i)}$, cette fonction a deux pôles simples en $z_1 = \frac{-i}{3}$ et $z_2 = -3i$, seul $z_1 = -\frac{i}{3}$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors en appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3} = 2\pi i \times Res\left(f, -\frac{i}{3}\right)$$

$$Res\left(f, -\frac{i}{3}\right) = \lim_{z \to -\frac{i}{3}} \left[\left(z + \frac{i}{3}\right) \times \frac{2}{3\left(z + \frac{i}{3}\right)(z + 3i)}\right] = \frac{1}{4i}$$

$$\Longrightarrow I_3 = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice N° 7: : En utilisant le théorème des résidus, Démontrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta d\theta}{5 - \sin\theta} = 0 \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} e^{-m} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solution :

- Démonstration de : $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta d\theta}{5-4\sin\theta}$

on pose $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0,2\pi]$ et $z^{-1} = e^{-i\theta}$ alors on peut écrire :

$$sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$cos3\theta = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2} = \frac{z^6 + 1}{2z^3}$$

$dz = ie^{i\theta}d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$I_1 = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^6 + 1}{2z^3}}{\left(5 - 4\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(-4z^2 + 10iz + 4)} dz$$

soit $f(z) = \frac{z^6+1}{z^3(-4z^2+10iz+4)} = \frac{z^6+1}{-4z^3(z-2i)\left(z-\frac{i}{2}\right)}$, cette fonction a un pôle triple en $z_1 = 0$ etdeux pôles simples $z_2 = \frac{i}{2}$; $z_3 = 2i$, seuls $z_1 = 0 \; et \; z_2 = \frac{i}{2}$ sont à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors en appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$I_1 = \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(-4z^2 + 10iz + 4)} dz = 2\pi i \times \left(Res(f, 0) + Res\left(f, \frac{i}{2}\right)\right)$$

$$Res(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z^3) \times \frac{z^6 + 1}{z^3(-4z^25 + 10iz + 4)}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^6 + 1}{(-4z^2 + 10iz + 4)}\right] = \frac{-21}{16}$$

$$Res\left(f, \frac{i}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} \left[\left(z - \frac{i}{2}\right) \times \frac{z^6 + 1}{-4z^3(z - 2i)\left(z - \frac{i}{2}\right)}\right] = \lim_{z\to\frac{i}{2}} \left[\frac{z^6 + 1}{-4z^3(z - 2i)}\right] = \frac{21}{16}$$

$$\Longrightarrow I_1 = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{iz(-4z^2 + 10iz + 4)} dz = 2\pi i \times \left(\frac{-21}{16} + \frac{21}{16}\right) = 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

- Démonstration de : $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{cosmxdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosmxdx}{x^2+1}$ $\left(\frac{cosmx}{x^2+1}\right.$ est une fonction paire)

On considère la fonction $f(z)=\frac{e^{imz}}{z^2+1}$ et en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C composé d'un intervalle $[-R,R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{+R} f(x)dx+\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

On fait $\lim_{R\to+\infty}\Rightarrow$:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_j Res(f,a_j)$$

$f(z)=\frac{e^{imz}}{z^2+1}$ a 2 pôles simples en $z_1=i$; $z_2=-i$ ce dernier est rejeté, seul $z_1=i$ a une partie imaginaire positive ($z_1\in C([-R,+R]+\Gamma)$),Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x^2+1}dx=2\pi i\big(Res(f,i)\big)$$

On a

$$Res(f,i)=\lim_{z\to i}\left((z-i)\times\frac{e^{imz}}{z^2+1}\right)=\frac{e^{-1}}{2i}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x^2+1}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right)=\pi e^{-m}=\pi e^{-m}+0\times i$$

On déduit alors :

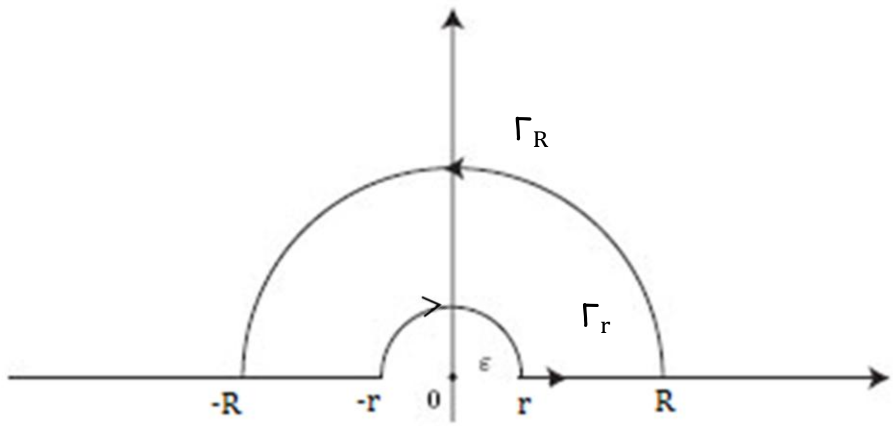
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\pi e^{-m}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x^2+2x+2}dx=0$$

➢ Démonstration de $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{iz}}}{\mathrm{z}}$ qui a un pôle simple en $z_1 = 0$, ce dernier est sur le chemin d'intégrale, on ne peut pas intégrer sur un chemin passant par un point singulier ; en modifiant le contour comme C composé de : $[r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$; avec $\Gamma_R\ et\ \Gamma_r$ sont des demi-cercles centrés à l'origine de rayons $R\ et\ r$ respectivement , situés au-dessus de l'axe réel,



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Pour l'intégrale $\int_{-R}^{-r} f(x)dx$, on fait le changement de variable $x = -x$:

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = -\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{x}} dx$$

Par la suite

$$\int_r^{+R} f(x)dx + \int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{x}} dx = 2i \int_r^R \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}} dx$$

On fait la limite de $r \to 0\ et\ R \to \infty$ d'où $\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$

Pour calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_r} f(z)dz$ on pose $= re^{i\theta}$; $dz = ire^{i\theta}d\theta$, on obtient par la suite :

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}}}{\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}} ire^{i\theta}d\theta = \int_{\pi}^{0} id\theta = -i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$2i\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}dx = i\pi + 2\pi i\sum_{j} Res(f, a_j)$$

Avec $z_1 = 0$ est à l'extérieur de notre contour C, alors

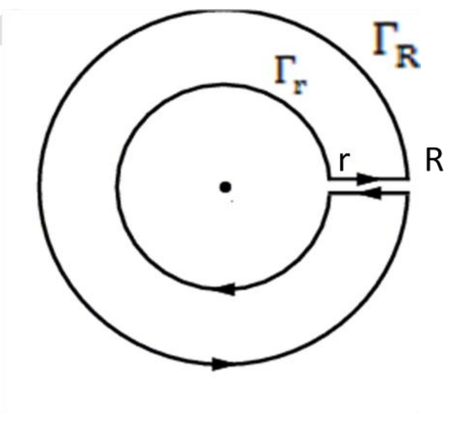
$$2i\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}dx = i\pi$$

$$I_3 = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}dx = \frac{\pi}{2}$$

- Démonstration de $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}dx = \frac{-1}{2}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{(\ln z)^2}{(z+1)^3}$, et soit le contour C composé de : $[r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$

avec $\Gamma_R\ et\ \Gamma_r$ sont des cercles centrés à l'origine de rayons $R\ et\ r$ respectivement



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_R^{r} f(z)dz + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

on fait les limites $R \to +\infty\, et\, r \to 0$, on obtient par la suite :

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0 \quad et \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

On a aussi : le long de $[r, R]$ $\ln z = \ln x$ ainsi que le long du chemin $[R, r]$ $\ln z = \ln x + i2\pi$, on peut écrire alors :

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \int_r^{+R} f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{(x+1)^3} dx \;\; et \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \int_R^{r} f(z)dz = -\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(i2\pi)^2}{(x+1)^3} dx - \int_0^{+\infty} \frac{4i\pi.\ln x}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Par la suite

$$4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Comme La fonction $f(z) = \frac{(\boldsymbol{lnz})^2}{(\boldsymbol{z+1})^3}$ a un pôle triple en $z_1 = -1$ à l'intérieur de contour C, alors :

$$res(f, -1) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \frac{d^2}{dz^2}\left((z+1)^3 \times f(z)\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \frac{d^2}{dz^2} (\ln z)^2 = 1 - i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx = 2\pi i \times (1 - i\pi)$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx = \frac{-1}{2} \end{cases}$$