Université de M'sila **Module : Transformations intégrales**

Département de Mathématiques **Durée : $1^h : 00$**

Examen final le : 28-09-2020

Exercice 01 : (6pts) 1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte

$$\pi(x) = \begin{cases} 1\ , & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0\ , & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

2) En déduire les transformées de Fourier des fonctions suivantes

a) $\pi(x+1)$, *b)* $x^2\pi(x)$, *c)* $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

3) Calculer l'intégrale suivante $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx$

Exercice 02 : I 6pts) 1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante :

$$f(x) = H(x)e^{-\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha x} & , \quad x \geq 0 \\ 0\ , & x < 0 \end{cases}, \alpha > 0.$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside, $H(x) = \begin{cases} 1\ , & x \geq 0 \\ 0\ , & x < 0 \end{cases}.$

2) En déduire la transformée de Fourier de : $g(x) = e^{-\alpha|x|}$.

3) En déduire la transformée de Fourier de : $H(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II 3pts) Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\ ,\ g(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

1) Sachant que $\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, déterminer $\widehat{g}(\xi)$.

Exercice 03 :

I 3pts) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré fini $(\mu(X) < \infty)$, montrer que pour

$1 \leq p$ on a $L^p(X) \subset L^1(X)$ et que $\|f\|_1 \leq (\mu(X))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$

I I 2pts) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^\infty(X)$ tel que $\|f\|_\infty > 0$.

1) Si l'on pose $I_n = \int_X |f|^n\, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|f\|_\infty$.

Bon courage

Correction d'examen final
Transformations intégrales

Exo 1 (6 pts)

1) on a $\hat{\Pi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot \Pi(x)\, dx$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}} \quad 1$$

2) a) $\mathcal{F}(\Pi(x+1))(\xi) = \mathcal{F}((\tau_{-1}\Pi)(x))(\xi) = e^{-2\pi i\xi(-1)} \cdot \hat{\Pi}(\xi)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(\Pi(x+1))(\xi) = e^{2\pi i\xi} \times \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}} \quad 1$$

b) on a : $\frac{d^{(2)}}{d\xi^2}\hat{\Pi}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^2\Pi(x)\right)(\xi)$ 1

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(x^2\Pi(x))(\xi) = \frac{-1}{4\pi^2} \times \frac{d^{(2)}}{d\xi^2}\left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)} \quad 0{,}5$$

c) on a $\mathcal{F}(\hat{\Pi}(x))(\xi) = \Pi(-\xi)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)(\xi) = \Pi(\xi)}, \text{ car } \Pi \text{ est paire} \quad 1$$

3) D'après l'identité de parseval, ~~on a~~ 1

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (\Pi(\xi))^2 d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi = \boxed{1} \quad 0{,}5$$

Exo 2 : (6 pts)

1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0$

1) $\hat f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot e^{-\alpha x}\,dx$ 1

$\Rightarrow \boxed{\hat f(\xi) = \frac{1}{\alpha + 2\pi i \xi}}$ 1

2) $\hat g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot g(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot e^{\alpha x}\,dx + \frac{1}{\alpha + 2\pi i \xi}$ 1

$\Rightarrow \boxed{\hat g(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2}}$ 1

3) on a : $\frac{d^{(n-1)}}{d\xi^{n-1}} \hat f(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^{n-1} H(x)\, e^{-\alpha x} \right)(\xi)$ 1

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} \right)(\xi) = \frac{1}{(n-1)!\,(-2\pi i)^{n-1}} \times \frac{d^{(n-1)}}{d\xi^{n-1}} \hat f(\xi)}$ 1

II 3 pts) on a : $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$

$\Rightarrow g(x) = (\tau_1 f)(x)$, alors 1,5

$\hat g(\xi) = \mathcal{F}\left((\tau_1 f)(x) \right)(\xi) = e^{-2\pi i \xi (1)} \cdot \hat f(\xi)$

$= e^{-2\pi i \xi} \cdot \hat f(\xi)$

$\Rightarrow \boxed{\hat g(\xi) = e^{-2\pi i \xi}\, \pi\, e^{-2\pi |\xi|}}$ 1,5

EXo3 : I 3pts) supposons que $1 < p$, (le cas $p=1$ est trivial)

soit $f \in L^p$, l'inégalité de Hölder appliquée à f et 1 avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient 1

$$\int_X |f \times 1| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |1|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$ 1

$$\Rightarrow \|f\|_1 \leq \|f\|_p \left(\mu(X)\right)^{\frac{1}{q}} \text{. i.e., } L^p(X) \subset L^1(X)$$

1

II 2pts)

on a
$$I_{n+1} = \int_X |f|^{n+1} d\mu = \int_X |f|^n \cdot |f| \, d\mu$$ 1

$$\leq \int_X |f|^n \left(\sup_{x \in X} \operatorname{ess} |f|\right) d\mu$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \int_X |f|^n d\mu$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot I_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|f\|_\infty}$$ 1