Université de M'sila
Département de Mathématiques

Module : Transformations intégrales
Durée : $1^h : 00$

Examen de rattrapage le : 03-11-2020

Exercice 01 : (7 pts)

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

2) En déduire les transformées de Fourier des fonctions suivantes

a) $\pi(-\frac{x}{2})$, *b)* $\pi(x - \frac{1}{2})$, *c)* $\pi(x) * \pi(x)$, *d)* $x^n\pi(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 02 : (7 pts)

I 4 pts) 1) En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe aucun élément $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$; $g * f = f$.

2) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution, $f * f = f$.

II 3 pts)

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} + f(-x).$$

1) Sachant que $\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, déterminer $\widehat{g}(\xi)$.

Exercice 03 : (6 pts)

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soient $f \in L^p([0, +\infty[)$ et $g \in L^q([0, +\infty[)$, calculer

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)g(x)dx \; .$$

Bon courage

Correction d'examen Rattrapage

Exo 1 (7 pts)

1) on a $\boxed{\hat{\Pi}(\xi) = \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}}$ (1,5)

2) a) $\mathcal{F}\left(\Pi\left(-\frac{x}{2}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(h_{-\frac{1}{2}}\Pi\right)(x)\right)(\xi) = \dfrac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\hat{\Pi}\left(\dfrac{\xi}{-\frac{1}{2}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\Pi\left(-\frac{x}{2}\right)\right)(\xi) = -\dfrac{\sin(-2\pi\xi)}{\pi\xi}}$ (1,5)

b) $\mathcal{F}\left(\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(\tau_{\frac{1}{2}}\Pi\right)(x)\right)(\xi) = e^{-2\pi i\xi\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\hat{\Pi}(\xi)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)(\xi) = e^{-\pi i\xi}\cdot\dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}}$ (1)

c) $\mathcal{F}\left(\Pi(x)*\Pi(x)\right)(\xi) = \hat{\Pi}(\xi)\cdot\hat{\Pi}(\xi)$

$= \left(\dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$ (1)

d) on a : $\dfrac{d^{(n)}}{d\xi^n}\hat{\Pi}(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(-2\pi i x\right)^n\Pi(x)\right)(\xi)$ (1)

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(x^n\Pi(x)\right)(\xi) = \dfrac{1}{(-2\pi i)^n}\cdot\dfrac{d^{(n)}}{d\xi^n}\hat{\Pi}(\xi)}$ (1)

Exo 2 (7 pts) (0,5)

I 4 pts) 1) supposons que $\exists g\in L^1(\mathbb{R}) : g*f = f, \forall f\in L^1$

(1)

$\Rightarrow \hat{g}(\xi)\cdot\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \Rightarrow \hat{f}(\xi)\left[\hat{g}(\xi)-1\right]=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\xi)=0 \\ \vee \\ \hat{g}(\xi)=1 \Rightarrow \lim\limits_{\xi\to\pm\infty}\hat{g}(\xi)=1, \text{ contradiction car } \lim\limits_{\xi\to\pm\infty}\hat{f}(\xi)=0 \end{cases}$ 0,5 1

Alors, $\nexists\, g\in L^1(\mathbb{R}) : g * f = f, \ \forall f\in L^1(\mathbb{R})$.

2) on a $f * f = f \Rightarrow \hat{f}(\xi)\cdot\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ 0,5

$\Rightarrow \hat{f}(\xi)\left[\hat{f}(\xi)-1\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\xi)=0 \\ \vee \\ \hat{f}(\xi)=1, \text{ impossible car } \lim\limits_{\xi\to\pm\infty}\hat{f}(\xi)=0 \end{cases}$ 1

Alors $\hat{f}(\xi)=0 \Rightarrow \boxed{f=0 \ p.p.}$ 0,5

II 3 pts)

on a : $g(x) = \frac{1}{2}f(x) + f(-x)$ 1

$\Rightarrow \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}f(x)+f(-x)\right)(\xi)$

$= \frac{1}{2}\mathcal{F}(f(x))(\xi) + \mathcal{F}(f(-x))(\xi)$

$= \frac{1}{2}\hat{f}(\xi) + \hat{f}(-\xi)$ 1

$= \frac{1}{2}\pi e^{-2\pi|\xi|} + \pi e^{-2\pi|-\xi|}$, alors

$\Rightarrow \boxed{\hat{g}(\xi) = \frac{3}{2}\pi e^{-2\pi|\xi|}}$ 1

Exo3 (6 pts) on a

$$\left|\int_0^T f(u)g(u)\,du\right| \leq \int_0^T |f(u)g(u)|\,du$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |f(u)g(u)|\,du \text{ --- } (*)$$

2

2

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$(*) \Leftrightarrow \left|\int_0^T f(u)g(u)\,du\right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g(x)|^q\,du\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

1

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(u)g(u)\,du\right| \leq \frac{1}{T}\cdot \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to+\infty} \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(u)g(u)\,du\right| \leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$$

car $\|f\|_p < \infty$ et $\|g\|_q < \infty$.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(u)g(u)\,du = 0}$$

1