Solution de l'Ex 4

1) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x^2 y = -3x\,xy = -3x_0 y_0\, x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3xy^2 = 3xy\,y = 3x_0 y_0\, y \end{cases}$$

On a : $xy = x_0 y_0 = C^{te}$

On, en séparant les variable

$$\frac{dx}{x} = -3x_0 y_0\, dt$$

et $$\frac{dy}{y} = 3x_0 y_0\, dt$$

par intégration :

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) = -3x_0 y_0 t, \quad \text{soit : } \boxed{x(t) = x_0\, e^{-3x_0 y_0 t}} \quad (*) \\ \ln\left(\dfrac{y}{y_0}\right) = 3x_0 y_0 t, \quad \text{soit : } \boxed{y(t) = y_0\, e^{3x_0 y_0 t}} \quad (**) \end{cases}$$

2) Dans cette description Lagrangienne, la vitesse et l'accélération instantanée de la particule P du fluide, à l'instant t soit :

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt} \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}_P}{dt} \begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases}$$

donc, pour l'écoulement étudié d'après (*) et (**)

il vient :

$$\boxed{\vec{V}_P \begin{cases} -3x_0^2 y_0\, e^{-3x_0 y_0 t} & (*)' \\ 3x_0 y_0^2\, e^{3x_0 y_0 t} & (**)' \end{cases}}$$