II- الإجابة

سيتم الاستعانة ببرنامج Excel لتوضيح مختلف الحسابات.

1- حساب العائد المتوقع، التباين، الانحراف المعياري، التباين المشترك ومعامل الارتباط

1-1- العائد المتوقع للأصول المالية

يمكن حساب العائد المتوقع انطلاقا من العوائد التاريخية كما يلي:

$$E(R) = \bar{R} = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$$

ومنه:

$$E(R_1) = \bar{R}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$$

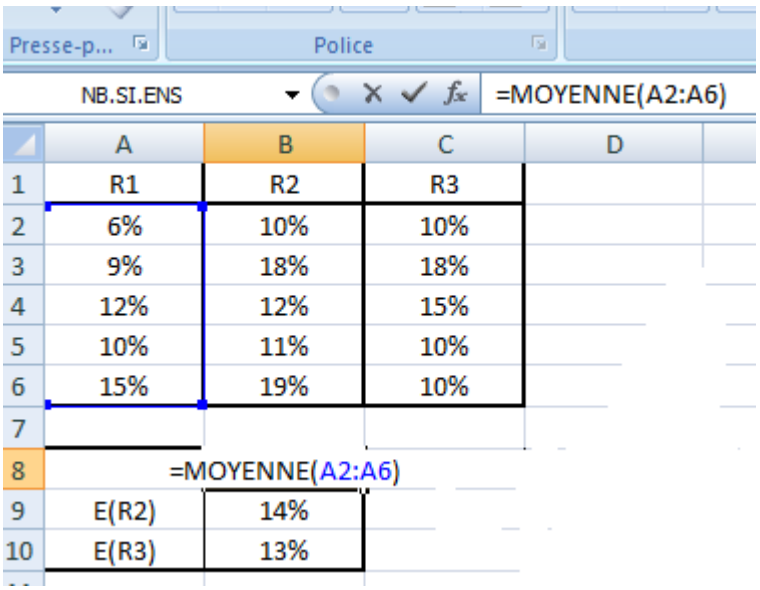
$$E(R_1) = 10.4\%$$

بنفس الطريقة:

$$E(R_2) = 14\%$$

$$E(R_3) = 12.6\%$$

أو باستعمال برنامج *Excel* والصيغة **=moyenne**



	A	B	C	D
1	R1	R2	R3	
2	6%	10%	10%	
3	9%	18%	18%	
4	12%	12%	15%	
5	10%	11%	10%	
6	15%	19%	10%	
7				
8	=MOYENNE(A2:A6)			
9	E(R2)	14%		
10	E(R3)	13%		

1-2- حساب التباين والانحراف المعياري

في حالة العوائد التاريخية، فإن تباين الأصل المالي $VAR(R)$ يحسب كما يلي:

$$VAR(R) = \frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + \cdots + (R_n - \bar{R})^2}{n-1}$$

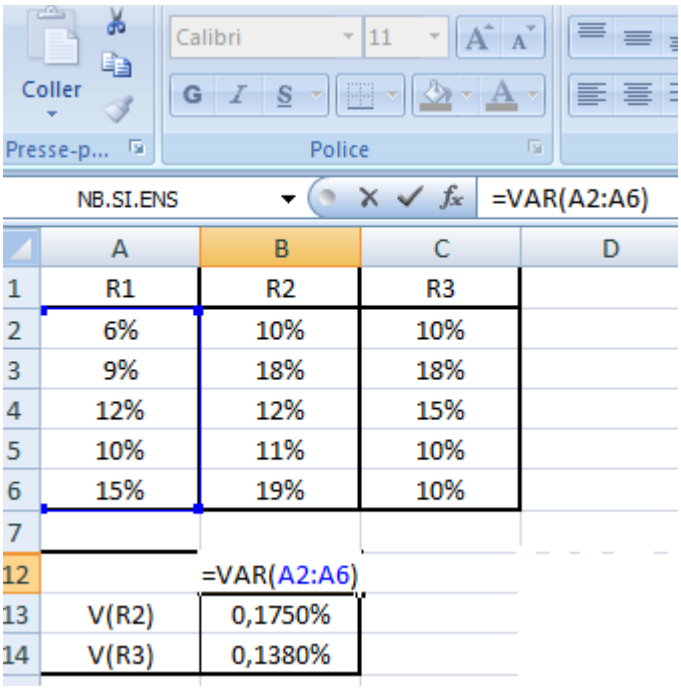
$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_t - \bar{R})^2}{n-1}$$

$$VAR(R_1) = 0.1130\%$$

$$VAR(R_2) = 0.1750\%$$

$$VAR(R_3) = 0.1380\%$$

يمكن استعمال الصيغة **=var**



	A	B	C	D
1	R1	R2	R3	
2	6%	10%	10%	
3	9%	18%	18%	
4	12%	12%	15%	
5	10%	11%	10%	
6	15%	19%	10%	
7				
12		=VAR(A2:A6)		
13	V(R2)	0,1750%		
14	V(R3)	0,1380%		

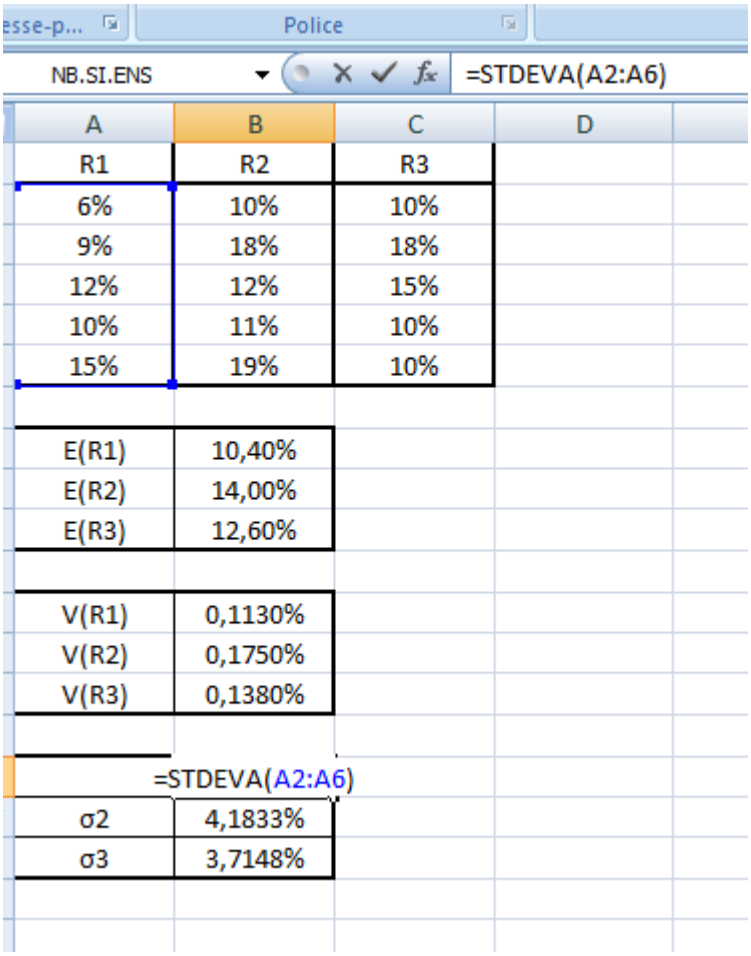
أما بالنسبة للانحراف المعياري فإنه يحسب بالطريقة الآتية:

$$\sigma_1 = \sqrt{VAR(1)} = 3.3615\%$$

$$\sigma_2 = \sqrt{VAR(2)} = 4.1833\%$$

$$\sigma_3 = \sqrt{VAR(3)} = 3.7148\%$$

يمكن حسابها بطريقتين في برنامج Excel، إما بالصيغة =STDEVA(Valeurs) أو بجذر التباين **=RACINE(Nombre)**



A	B	C	D
R1	R2	R3	
6%	10%	10%	
9%	18%	18%	
12%	12%	15%	
10%	11%	10%	
15%	19%	10%	
E(R1)	10,40%		
E(R2)	14,00%		
E(R3)	12,60%		
V(R1)	0,1130%		
V(R2)	0,1750%		
V(R3)	0,1380%		
=STDEVA(A2:A6)			
σ2	4,1833%		
σ3	3,7148%		

1-3- التباين المشترك

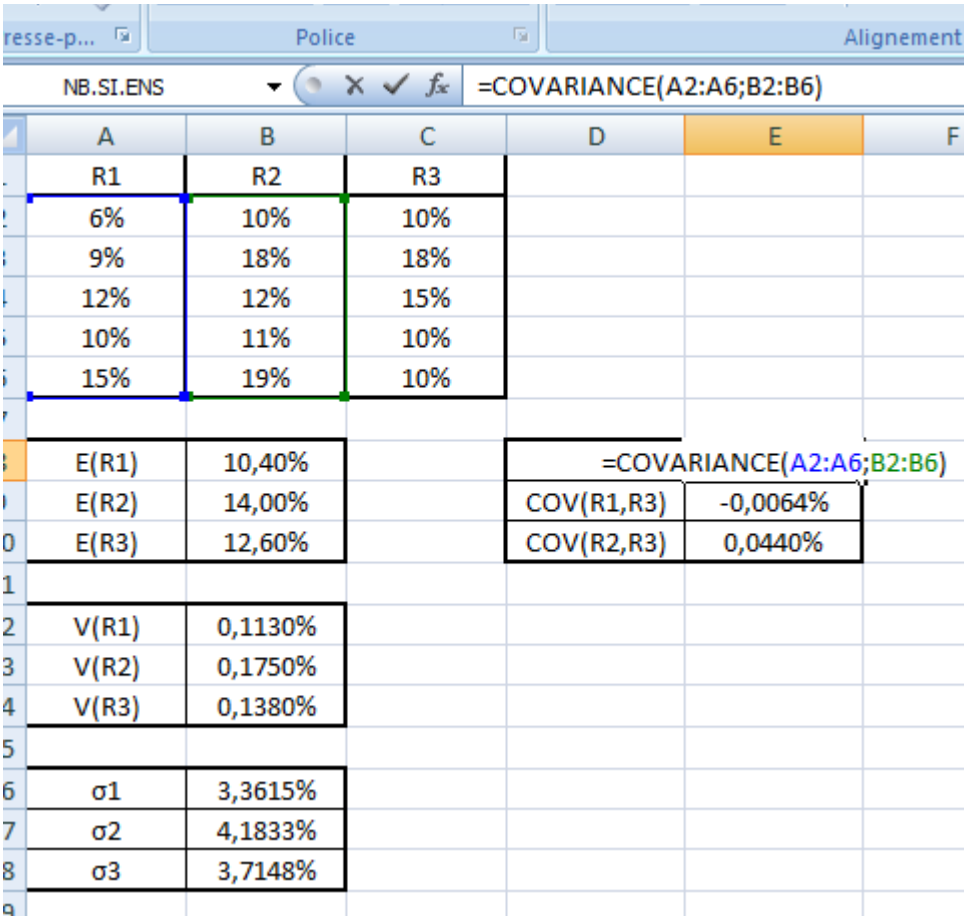
يمكن حساب التباين المشترك بين أصلين ماليين بالصيغة الرياضية الآتية:

$$Cov(R_1, R_2) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{1t} - E(R_1))(R_{2t} - E(R_2))}{n-1}$$

ومنه:

$$Cov(R_1, R_2) = 0.066\%$$
$$Cov(R_1, R_3) = -0.0064\%$$
$$Cov(R_2, R_3) = 0.044\%$$

يمكن حساب التباين المشترك باستعمال الصيغة **=COVARIANCE**



	A	B	C	D	E	F
	R1	R2	R3			
	6%	10%	10%			
	9%	18%	18%			
	12%	12%	15%			
	10%	11%	10%			
	15%	19%	10%			
	E(R1)	10,40%		=COVARIANCE(A2:A6;B2:B6)		
	E(R2)	14,00%		COV(R1,R3)	-0,0064%	
	E(R3)	12,60%		COV(R2,R3)	0,0440%	
	V(R1)	0,1130%				
	V(R2)	0,1750%				
	V(R3)	0,1380%				
	σ1	3,3615%				
	σ2	4,1833%				
	σ3	3,7148%				

1-4- معامل الارتباط

يحسب معامل الارتباط بين أصلين ماليين بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\rho_{12} = \frac{cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 . \sigma_2}$$

$$\rho_{1,2} = 46.934\%$$

$$\rho_{1,3} = -5.125\%$$

$$\rho_{2,3} = 28.134\%$$

أو باستعمال الصيغة الرياضية **=COEFFICIENT.CORRELATION**

Presse-p... | Police | Alignement

NB.SI.ENS | =COEFFICIENT.CORRELATION(A2:A6;B2:B6)

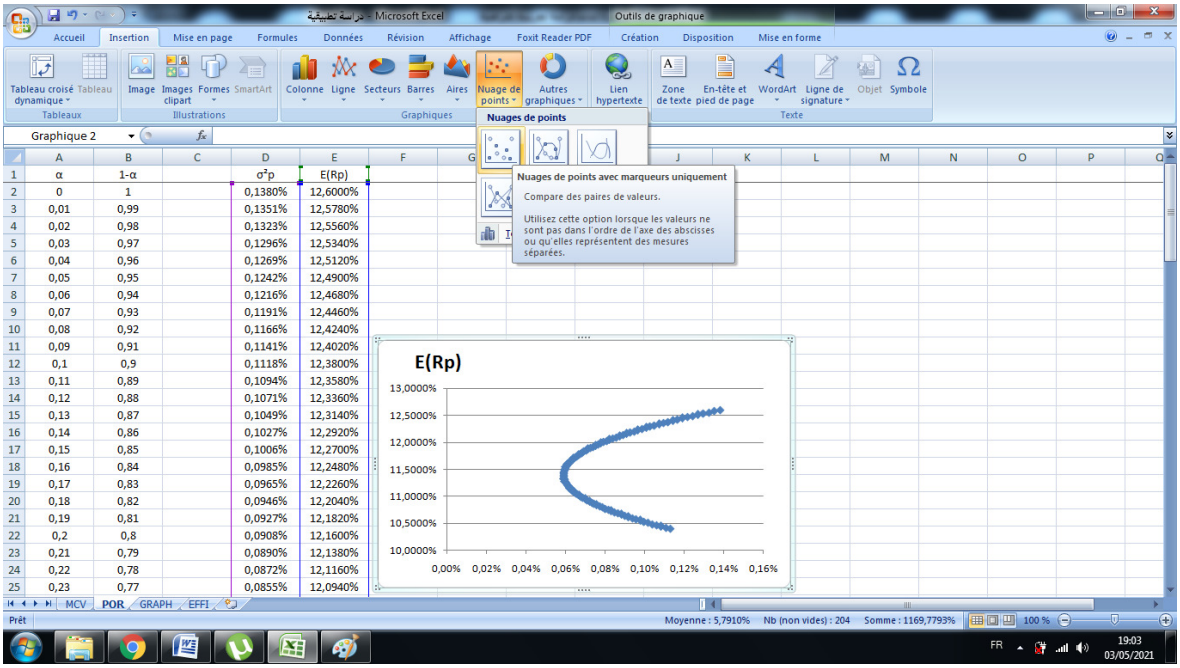
	A	B	C	D	E	F
1	R1	R2	R3			
2	6%	10%	10%			
3	9%	18%	18%			
4	12%	12%	15%			
5	10%	11%	10%			
6	15%	19%	10%			
7						
8	E(R1)	10,40%		COV(R1,R2)	0,0660%	
9	E(R2)	14,00%		COV(R1,R3)	-0,0064%	
10	E(R3)	12,60%		COV(R2,R3)	0,0440%	
11						
12	V(R1)	0,1130%		=COEFFICIENT.CORRELATION(A2:A6;B2:B6)		
13	V(R2)	0,1750%		ρ(R1,R3)	-5,125%	
14	V(R3)	0,1380%		ρ(R2,R3)	28,314%	
15						

2- المحفظة ذات أدنى تباين

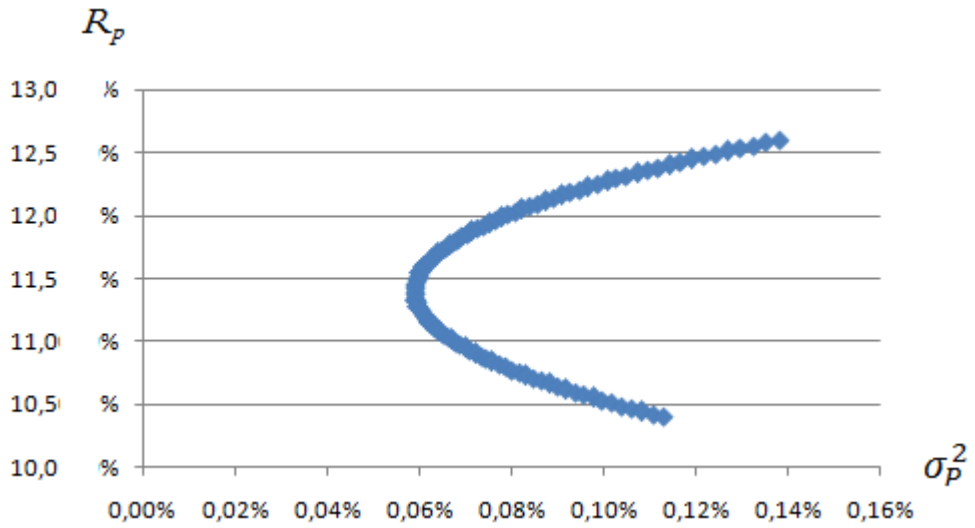
2-1- الشكل البياني

إذا رغب مستثمر في تكوين محفظة مالية مكونة من أصلين ماليين R_3 وR_1، فإن سيتم تحديد جميع التوليفات R_p وσ_P^2، عند كل مستوى من قيم $1 \geq \alpha \geq 0$.

ومن خلال القيم المتحصل عليها، يمكن رسم جميع المحافظ المالية الممكنة، من خلال سحابة النقاط كما هو موضح في الشكل الموالي:



ومنه، فإن جميع المحافظ الممكنة هي موضحة في الشكل الموالي:



2-2- المحفظة ذات أدنى تباين

يمكن حساب المحفظة ذات أدنى تباين باستعمال القانون الآتي:

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho} , \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho} \right)$$

بتطبيق عددي:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$w_1 = \frac{0.138\% - (3.3615\% \times 3.7184\% \times (-5.125\%))}{0.113\% + 0.138\% - 2 \times (3.3615\% \times 3.7184\% \times (-5.125\%))}$$

$$w_1 = 0.549797$$

$$w_1 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$w_1 = \frac{0.113\% - (3.3615\% \times 3.7184\% \times (-5.125\%))}{0.113\% + 0.138\% - 2 \times (3.3615\% \times 3.7184\% \times (-5.125\%))}$$

$$w_1 = 0.450203$$

والملاحظ أن $w_1 + w_2 = 1$

2-3- عائد وتباين المحفظة ذات أدنى تباين

يمكن حساب عائد الحفظة ذات أدنى تباين بالصيغة الرياضية الآتية.

$$R_P = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$$

وبتطبيق عددي:

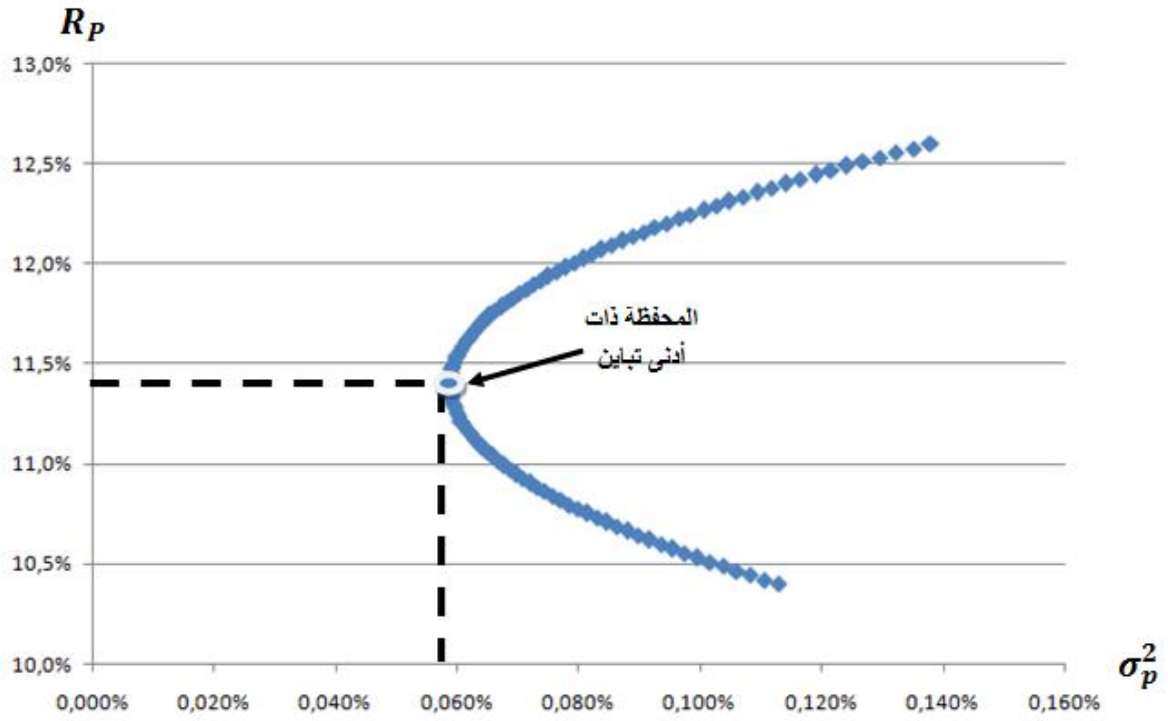
$$R_P = (0.549797)(0.104) + (0.450203)(0.126)$$
$$\boldsymbol{R_P = 11.39\%}$$

بالنسبة لتباين المحفظة، فإنه يمكن حسابها باستعمال القانون الآتي:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2.w_1.w_3.\sigma_{13}$$

وبتطبيق عددي:

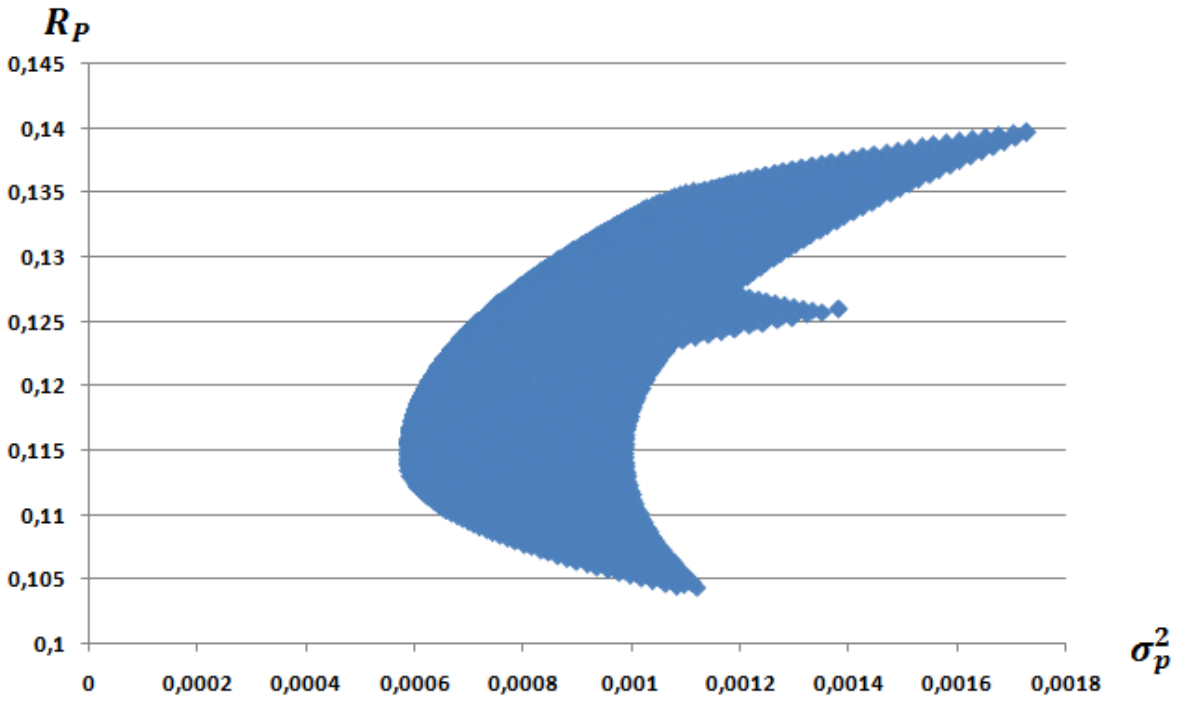
$$\sigma_p^2 = (0.549797^2)(0{,}00113) + (0.450203^2)(0{,}00138) + 2(0.549797)(0.450203)(-0{,}000064)$$
$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = 0{,}058959\%}$$



3- حالة محفظة مالية مكونة من الأصول الثلاثة (R_1، R_2، R_3)

3-1- رسم فضاء المحافظ المالية الممكنة.

باستعمال برنامج Excel يمكن رسم فضاء المحافظ المالية الممكنة كما يلي:



يمثل الجزء المضلل مجموعة المحافظ الممكن تشكيلها من خلال الأصول الثلاثة.

3-2- المحفظة ذات أدنى تباين مكونة من الأصول الثلاثة

يمكن حساب المحفظة ذات أدنى تباين من خلال الصيغة الآتية:

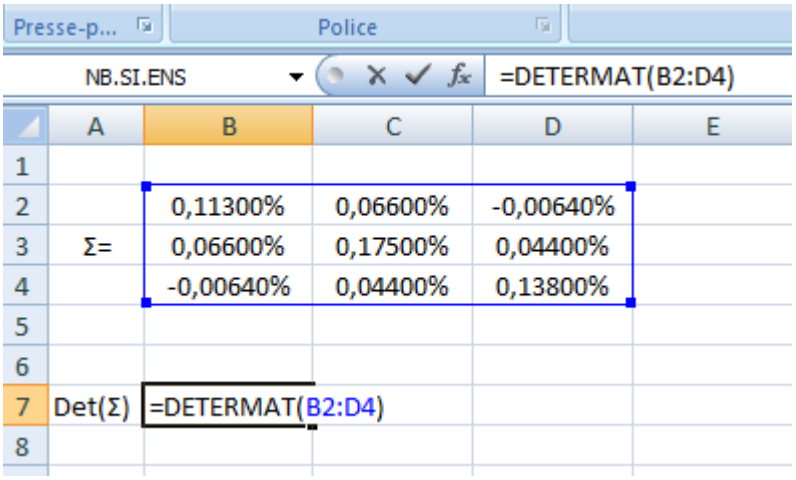
$$w^* = \frac{\Sigma^{-1}e}{e'\Sigma^{-1}e}$$

قبل ذلك، مصفوفة التباين والتباين المشترك Σ هي:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.113\% & 0.066\% & -0.0064\% \\ 0.066\% & 0.175\% & 0.044\% \\ -0.0064\% & 0.044\% & 0.138\% \end{pmatrix}$$

يجب الآن حساب المصفوفة العكسية Σ^{-1}، وللتأكد من وجود مصفوفة عكسية، يجب أن يكون محدد المصفوفة Σ غير معدوم.

باستعمال الصيغة **=DETERMAT** في برنامج Excel، يمكن حساب محدد المصفوفة Σ، كما هو موضح في الشكل الموالي:



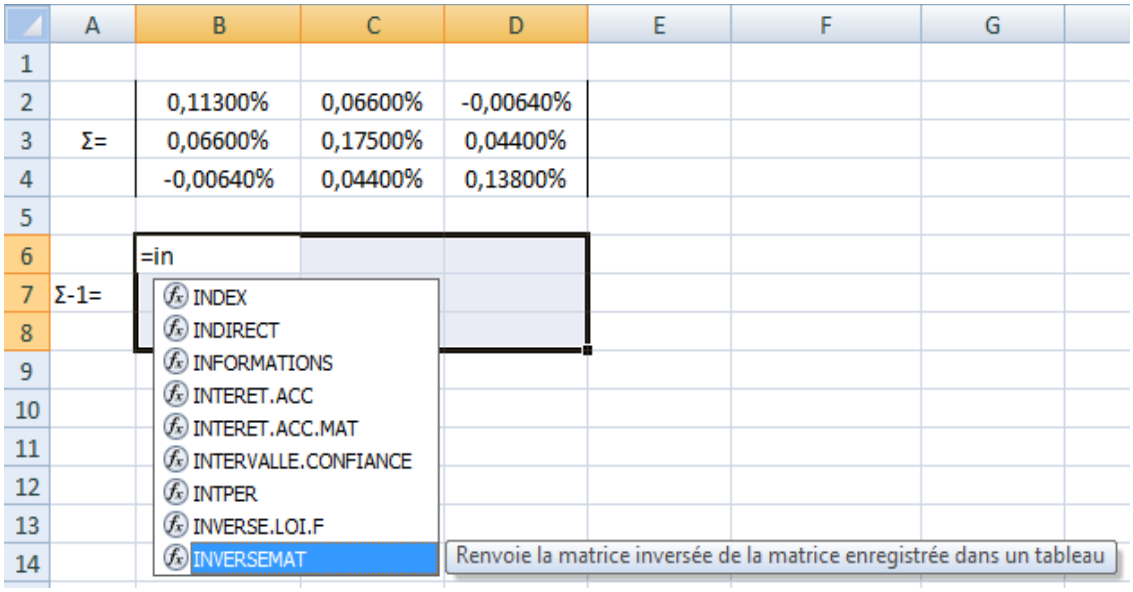
ومنه:

$$Det(\Sigma) = 0{,}000000186471480\%$$

وبما أن المحدد يختلف عن الصفر، فإنه توجد Σ^{-1}.

يمكن حساب مقلوب المصفوفة وذلك بإتباع الخطوات الآتية:

- التضليل على عدد الخلايا يساوي المصفوفة الأصلية (ذات بعد 3×3)
- كتابة الصيغة الخاصة بمقلوب مصفوفة وهي: ***=INVERSMAT*** كما هو موضح في الشكل:



- تحديد المصفوفة المراد إيجاد مقلوبها.
- الضغط على *ctrl+shift+entré*

B6 {=INVERSEMAT(B2:D4)}

	A	B	C	D	E
1					
2		0,11300%	0,06600%	-0,00640%	
3	Σ=	0,06600%	0,17500%	0,04400%	
4		-0,00640%	0,04400%	0,13800%	
5					
6		1 191,281	- 503,541	215,797	
7	Σ-1=	- 503,541	834,071	- 289,288	
8		215,797	- 289,288	826,882	
9					

وعليه، فإن Σ^{-1} هي:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1191.281 & -503.541 & 215.797 \\ -503.541 & 834.071 & -289.288 \\ 215.797 & -289.288 & 826.882 \end{pmatrix}$$

الآن: في صفحة Excel، يتم إنشاء الشعاع الأحادي e' وe (البعد 3×1) كما يلي:

	A	B	C	D
2		0,11300%	0,06600%	-0,00640%
3	Σ=	0,06600%	0,17500%	0,04400%
4		-0,00640%	0,04400%	0,13800%
5				
6		1 191,281	-503,541	215,797
7	Σ-1=	- 503,541	834,071	-289,288
8		215,797	-289,288	826,882
9				
10		1		
11	e=	1		
12		1		
13				
14	e'=	1	1	1
15				

من أجل حساب الشعاع:

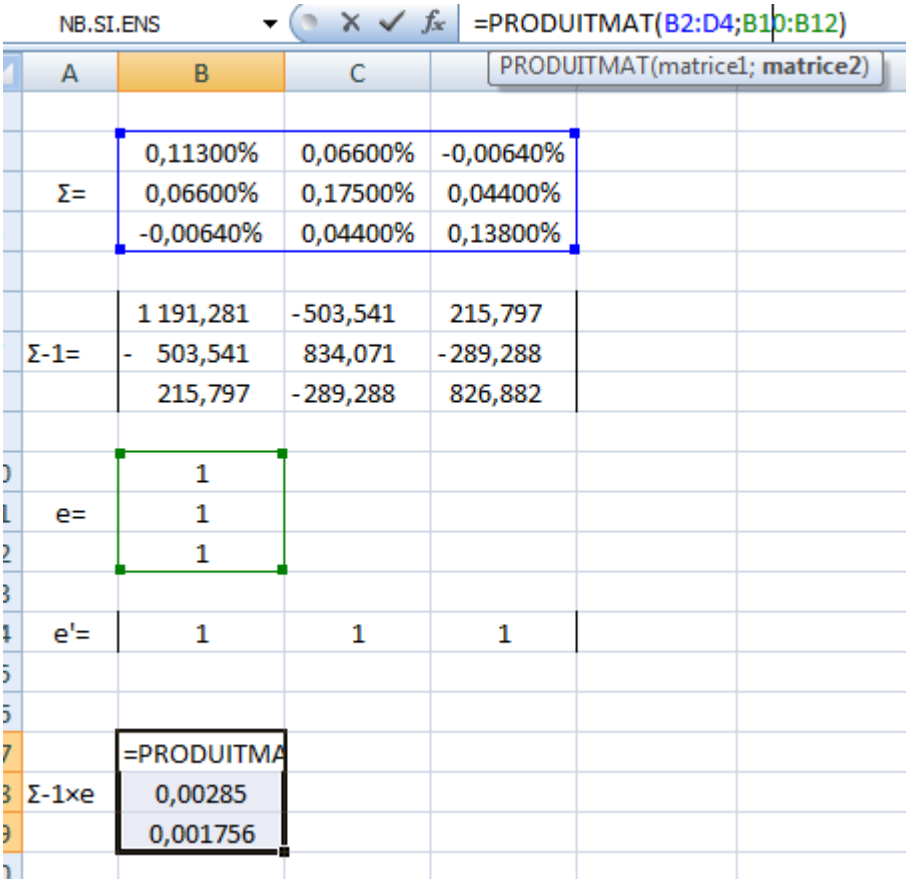
$$w^* = \frac{\Sigma^{-1}e}{e'\Sigma^{-1}e}$$

سيتم حساب البسط أولا ثم المقال كما يلي:

- **حساب $\Sigma^{-1}e$:**

يمكن حساب جداء مصفوفة في شعاع من خلال تضليل الخلايا التي ستحتوي على النتيجة، وباعتبار أن المصفوفة ذات بعد 3×3 والشعاع ذو بعد 3×1، فإن النتيجة ستكون شعاع ذو بعد 3×1، وعليه، سيتم تضليل شعاع طولي يحتوي على ثلاث خلايا، ثم كتابة الصيغة PRODUITMAT= (أي ضرب مصفوفة في مصفوفة، ولا يمكن حسابها إلا في حالة عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية).

يوضح الشكل الموالي الطريقة:

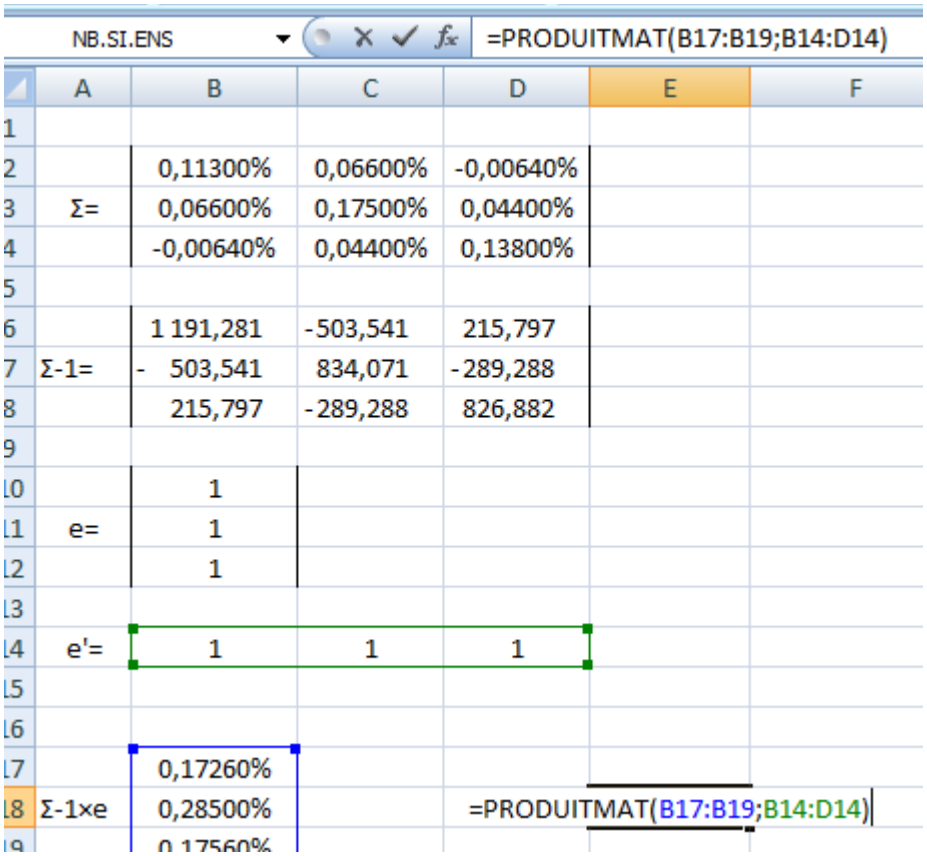


وعليه، فإن:

$$\Sigma^{-1}e = \begin{pmatrix} 0.1726\% \\ 0.285\% \\ 0.1756\% \end{pmatrix}$$

- **حساب المقام $e'\Sigma^{-1}e$**

بما أن $\Sigma^{-1}e$ قد تم حسابها، سيتم ضرب الشعاع الأفقي e' في الشعاع العمودي $\Sigma^{-1}e$ ، والنتيجة ستكون قيمة، ويتم حساب ذلك حسب ما هو موضح في الشكل الآتي:



وعليه، فإن: $e'\Sigma^{-1}e = 0.006332$

يمكن الآن حساب w^* بقسمة جميع مركبات الشعاع $\Sigma^{-1}e = \begin{pmatrix} 0.1726\% \\ 0.285\% \\ 0.1756\% \end{pmatrix}$ على القيمة 0.6332172% وعليه:

$$w^* = \begin{pmatrix} 27.258\% \\ 45.009\% \\ 27.732\% \end{pmatrix}$$

والملاحظ أن مجموع المركبات تساوي 1

ومنه، فإن المحفظة المالية ذات أدنى تباين هي باستثمار 27.258% في الأصل الأول R_1، واستثمار نسبة 45.009% في الأصل الثاني R_2 واستثمار الباقي أي 27.732% في الأصل الثالث R_3.

3-3- عائد وتباين المحفظة ذات أدنى تباين

يمكن حساب عائد المحفظة ذات أدنى تباين كما يلي:

$$R_p = w'R$$

بالتطبيق العددي:

$$R_p = (0.2725837 \quad 0.45009476 \quad 0.277321541)\begin{pmatrix} 10.40 \\ 14\% \\ 12.6\% \end{pmatrix}$$

$$R'_p = 12.63045\%$$

أما بالنسبة لتباين المحفظة ذات أدنى تباين فيمكن حسابها بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\sigma_p{}^2 = \acute{w}\Sigma w$$

بالتعويض العددي:

$$\sigma_p{}^2$$

$$= (0.27258 \quad 0.45009 \quad 0.277321)\begin{pmatrix} 0.113\% & 0.066\% & -0.0064\% \\ 0.066\% & 0.175\% & 0.044\% \\ -0.0064\% & 0.044\% & 0.138\% \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.27258 \\ 0.45009 \\ 0.27732 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma_p{}^2 = 0.08067\%}$$

3-4- المحافظ الحدودية والفعالة

المحافظ الحدودية هي تلك المحافظ ذات أدنى تباين لكن عند مستوى عائد محدد من طرف المستثمر الذي يرغب في الحصول عليه، ويمكن إيجاد المحافظ الحدودية بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\boldsymbol{w^* = \frac{C - BR_0}{(AC - B^2)}\Sigma^{-1}e + \frac{B - AR_0}{(B^2 - AC)}\Sigma^{-1}R}$$

لحساب المحافظ الحدودية، يجب أولا تحديد القيم A، B وC، حيث:

- $A = e'\Sigma^{-1}e,$
- $B = e'^{\Sigma^{-1}}R = R'^{\Sigma^{-1}}e,$
- $C = R'\Sigma^{-1}R$

يتم حساب القيم باستعمال الصيغة **=PRODUITMAT** في برنامج Excel

	A	B	C	D	E	F	G
		0,11300%	0,06600%	-0,00640%			
	Σ=	0,06600%	0,17500%	0,04400%			
		-0,00640%	0,04400%	0,13800%			
		1 191,281	-503,541	215,797			
	Σ-1=	- 503,541	834,071	-289,288			
		215,797	-289,288	826,882			
						10,40%	
0		1			R	14,00%	
1	e=	1				12,60%	
2		1		R	10,40%	14,00%	12,60%
3							
4	e'=	1	1	1			
5							
6		0,17260%					
7	Σ-1×e	0,28500%	A	e'Σ-1×e	0,006332		
8		0,17560%	B	e'Σ-1×R	0,00079976		
9			C	R'Σ-1×R	23,146685		
0		80,58798053					
1	Σ-1×R	27,95134141					
2		86,12973952					

وعليه، فإن:

- A=1698.17
- B=194.669
- C=23.14668

بالتعويض العددي:

$$w^* = \frac{23.14668 - 194.669.R_0}{(1698.17 \times 23.14668 - 194.669^2)} \begin{pmatrix} 1191.281 & -503.541 & 215.797 \\ -503.541 & 834.071 & -289.288 \\ 215.797 & -289.288 & 826.882 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{194.669 - 0.006332R_0}{(194.669^{2^2} - 1698.17 \times 23.14668)} \begin{pmatrix} 1191.281 & -503.541 & 215.797 \\ -503.541 & 834.071 & -289.288 \\ 215.797 & -289.288 & 826.882 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.104 \\ 0.14 \\ 0.126 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w^* = (23.146685 - 194.669.R_0)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2.00664} \\ \boldsymbol{-0.091593} \\ \boldsymbol{-1.673205} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{- (194.669 - 0.006332R_0)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1.97526} \\ \boldsymbol{-0.685105} \\ \boldsymbol{-2.11109} \end{pmatrix}$$

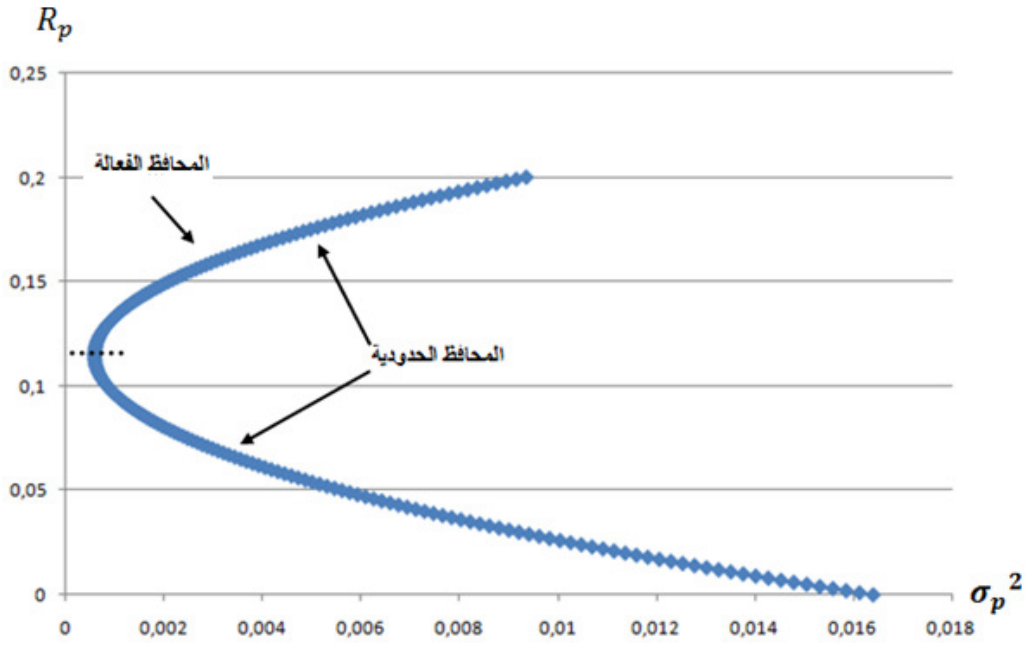
وعليه، يتم إعطاء قيمة للعائد المطلوب من طرف المستثمر R_0 ليتم الحصول على المحفظة الفعالة. أما بالنسبة للمحافظ الفعالة، فهي نفسها الحدودية مع إضافة شرط واحد وهو: $R_0 \geq$ 12.63%

يمكن رسم المحافظ الحدودية، بإعطاء قيم للعائد المطلوب R_0 ومن ثم الحصول على عائد وتباين المحفظة الحدودية، والشكل الموالي يوضح ذلك:

U5 =(Q5^2)*B2+(R5^2)*C3+(S5^2)*D4+2*Q5*R5*B3+2*Q5*S5*B4+2*R5*S5*C4

	P	Q	R	S	U	V	W	X	Y
1	R0	Alpha1	Alpha2	Alpha3	SIGMA P2	E(Rp)			
2	0	3,70375269	-3,1798172	0,47606451	0,01640471	2,91434E-16			
3	0,001	3,67608488	-3,15186662	0,47578173	0,01612998	0,001			
4	0,002	3,64841707	-3,12391603	0,47549896	0,01585765	0,002			
5	0,003	3,62074926	-3,09596545	0,47521619	0,01558773	0,003			
6	0,004	3,59308145	-3,06801486	0,47493341	0,01532022	0,004			
7	0,005	3,56541364	-3,04006428	0,47465064	0,01505512	0,005			
8	0,006	3,53774583	-3,01211369	0,47436786	0,01479243	0,006			
9	0,007	3,51007802	-2,98416311	0,47408509	0,01453214	0,007			
10	0,008	3,48241021	-2,95621252	0,47380231	0,01427425	0,008			
11	0,009	3,4547424	-2,92826194	0,47351954	0,01401878	0,009			
12	0,01	3,42707459	-2,90031136	0,47323676	0,01376571	0,01			
13	0,011	3,39940678	-2,87236077	0,47295399	0,01351505	0,011			
14	0,012	3,37173897	-2,84441019	0,47267122	0,0132668	0,012			
15	0,013	3,34407116	-2,8164596	0,47238844	0,01302095	0,013			
16	0,014	3,31640335	-2,78850902	0,47210567	0,01277751	0,014			
17	0.015	3.28873554	-2.76055843	0.47182289	0.01253648	0.015			

يوضح الشكل الموالي المحافظ الحدودية والمحافظ الفعالة.



3-5- المحفظة الفعالة عند عائد مطلوب 13%

في حالة ما إذا تم تحديد العائد $R_0 = 13\%$، فإنه يمكن إيجاد المحفظة الفعالة، أي ذات أدنى تباين بتطبيق عددي في المعادلة الآتية:

$$w^* = (23.146685 - 194.669.R_0)\begin{pmatrix} -2.00664 \\ -0.091593 \\ -1.673205 \end{pmatrix} - (194.669 - 0.006332R_0)\begin{pmatrix} -1.97526 \\ -0.685105 \\ -2.11109 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$w^* = (23.146685 - 194.669 \times 0.13)\begin{pmatrix} -2.00664 \\ -0.091593 \\ -1.673205 \end{pmatrix} - (194.669 - 0.006332 \times 0.13)\begin{pmatrix} -1.97526 \\ -0.685105 \\ -2.11109 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w^* = \begin{pmatrix} 0.1069374 \\ 0.45375877 \\ 0.43930383 \end{pmatrix}}$$

طبعا عائد هذه المحفظة هو $R_{\mathrm{p}} = 13\%$ في حين أن تباينها هو $\boldsymbol{\sigma_p{}^2 = 0.087302\%}$

4- إيجاد محفظة السوق في حالة وجود أصل خالي من المخاطرة

إذا رغب المستثمر في هذه الحالة الحصول على المحفظة ذات أدنى تباين مع الحصول على عائد قدره 12.5%، حيث تتكون المحفظة من الأصول الثلاثة (R_3، R_2، R_1) إضافة إلى أصل خالي من المخاطرة عائده 6.75%، فإن محفظة السوق تعطى كما يلي:

$$w^* = \Sigma^{-1}(R - eR_f)\frac{R_0 - R_f}{(R - eR_f)'\Sigma^{-1}(R - eR_f)}$$

بتعويض المعطيات السابقة، كما يلي:

$$\Sigma^{-1}(R - eR_f) = \begin{pmatrix} 1191.281 & -503.541 & 215.797 \\ -503.541 & 834.071 & -289.288 \\ 215.797 & -289.288 & 826.882 \end{pmatrix}.(0.125 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 0.675$$

ومنه، فإن محفظة السوق هي:

$$w^* = \begin{pmatrix} 0.244795 \\ 0.314344 \\ 0.440598 \end{pmatrix}$$