Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,** **2 ième Année Licence LMD**

Examen final (le: 02/06/2021)

Exercice 01 (05 points):

On lance un dé équilibré avec une pièce de monnaie en une seule fois.
(1) Décrire l'ensemble fondamental de cette expérience.
(2) Calculer le cardinal de cet ensemble fondamental.
(3) Exprimer puis calculer la probabilité des événements suivants:
A $= \{$Obtenir Face avec un nombre paire$\}$. **B** $= \{$ Obtenir Pile$\}$.
C $= \{$Obtenir un nombre impaire$\}$.

Exercice 02 (05 points):

Soient U_1, U_2 deux urnes telles que:
L'urne U_1 contient: 6 boules blanches et 4 boules noires.
L'urne U_2 contient: 7 boules blanches et 2 boules noires.
Tout d'abord on lance un dé. Si le nombre apparu est "6" on choisie l'urne U_1 sinon on choisie l'urne U_2. On tire ensuite une boule de l'urne choisie.
(1) Quelle est la probabilité de choisir l'urne U_1.
(2) Supposons qu'on fait le tirage dans l'urne U_2, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche.
(3) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche.
(4) Supposons que la boule tirée est banlche, quelle est la probabilité d'être tirée de l'urne U_1.

Exercice 03 (06 points):

Une urne U contient: 8 boules blanches et 2 boules noires.

I) On tire une boule avec remise 100 fois. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois d'apparition une boule blanche.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $E[X]$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 25 fois une boule blanche.

II) Maintenant, on tire une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Soit X la variable aléatoire définit comme étant " le nombre de tirages pour obtenir une boule blanche pour la première fois".

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $E[X]$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche dans le $25ième$ tirage.

Exercice 04 (04 points):

On considère une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a > 0$$

(1) Calculer la constante a.
(2) Déterminer $E[X]$.
(3) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1]$ et $\mathbb{P}[X \geq 2]$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة المسيلة | يوم: 2021/06/02

كلية الرياضيات والاعلام الآلي

قسم الرياضيات

الامتحان النهائي في مقياس الاحتمالات

التمرين الأول: نرمي حجر زهر النرد وقطعة نقدية في آن واحد.

1. أكتب المجموعة الأساسية لهذة التجربة العشوائية.
2. ما هو عدد عناصر هذه المجموعة.
3. عبر عن الأحداث التالية ثم أحسب إحتمال تحقق كل واحد منها:

A: "ظهور الوجه (Face) مع عدد زوجي" / B: "ظهور الظهر (Pile)" / C: "ظهور عدد فردي"

التمرين الثاني: ليكن الوعاءان U_1، U_2 حيث:

الوعاء U_1 يحوي على: 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.

الوعاء U_2 يحوي على: 7 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء.

نرمي حجر زهر النرد. إذا كان الرقم الظاهر هو "6" ، نختار الوعاء U_1 وإلا فإننا نختار الوعاء U_2. ثم نقوم بعد ذلك بسحب كرة من الوعاء المختار.

1. ما هو احتمال أن يكون الوعاء المختار هو U_1.
2. ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.
3. لنفرض أننا اخترنا U_2، ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.
4. لنفترض أن الكرة المسحوبة بيضاء، فما هو احتمال أن تكون مسحوبة من الوعاء U_1.

التمرين الثالث: وعاء يحوي على: 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء.

I) نقوم بسحب كرة ثم نرجعها إلى الوعاء 100 مرة (سحب بإرجاع). لنفترض أن X هو المتغير العشوائي الذي يحسب عدد مرات ظهور كرة بيضاء.

1. ما هو قانون احتمال X؟
2. احسب الأمل الرياضي $E[X]$
3. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء 25 مرة.

II) الآن ، نسحب كرة ثم نرجعها إلى الوعاء إلى غاية الحصول على كرة بيضاء. نعرف X المتغير العشوائي المعرف بـ "عدد السحوبات للحصول على كرة بيضاء لأول مرة".

1. ما هو قانون احتمال X؟
2. احسب الأمل الرياضي $E[X]$
3. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب (25) الخامس والعشرين.

التمرين الرابع: نعتبر دالة الكثافة المرفقة للمتغير العشوائي X

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$ حيث a موجب تماما

1. أحسب قيمة a
2. احسب الأمل الرياضي $E[X]$
3. أحسب $\mathbf{P}[-1 \leq X \leq 1]$ و كذا $\mathbf{P}[X \geq 2]$

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,** **2 ième Année Licence LMD**

Correction et Barème

Exercice 01 (05 points):

(1) L'ensemble fondamental

$$\Omega = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6, P1, P2, P3, P4, P5, P6\}.$$

(2) $Card(\Omega) = 12$.

(3) $\mathbf{A} = \{F2, F4, F6\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$\mathbf{B} = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$\mathbf{C} = \{F1, F3, F5, P1, P3, P5\} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Exercice 02 (05 points):

Tout d'abord on pose

U_1 : "*l'urne U_1 est choisie*"

U_2 : "*l'urne U_2 est choisie*"

A : " *On tire une boule blanche*"

(1) On a

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{6}.$$

(2) La probabilité demandée est

$$\mathbb{P}(A/_{U_2}) = \frac{7}{9}.$$

(3) En utilisant la formule de probabilité totale

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/_{U_1})\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A/_{U_2})\mathbb{P}(U_2) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{7}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{101}{135}.\end{aligned}$$

(4) En utilisant la formule de bayes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1/_A) &= \frac{\mathbb{P}(A/_{U_1})\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(A/_{U_1})\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A/_{U_2})\mathbb{P}(U_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{101}{135}} = \frac{101}{1350}.\end{aligned}$$

Exercice 03 (06 points):

I) 1. La variable aléatoire X suit la loi Binomiale

$$X \hookrightarrow B\left(100, \frac{8}{10}\right).$$

2. On a

$$E[X] = 100 \times \frac{8}{10} = 80.$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X = 25) = C_{100}^{25} \left(\frac{8}{10}\right)^{25} \left(\frac{2}{10}\right)^{100-25}.$$

II) 1. La variable aléatoire X suit la loi Géométrique

$$X \hookrightarrow G\left(\frac{8}{10}\right).$$

2. On a

$$E[X] = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8}.$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X = 25) = \frac{8}{10} \times \left(\frac{2}{10}\right)^{25-1}.$$

Exercice 04 (04 points):

(1) Nous avons $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx &= 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a} = 1 \\ &\Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

(2) On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

(3) La probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-1 &\leq X \leq 1] = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X &\geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 2] \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{2} e^{-x} dx \\ &= 1 - \int_0^2 e^{-x} dx = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$