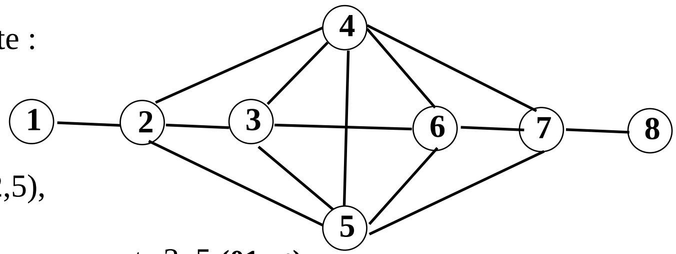
Faculté des mathématiques et de l'informatique	Date : 27.05.2021	Niveau : 1ère Année Master IDO
Département d'informatique	Durée : 01 H 30 Mn	Module : Théorie des graphes avancée

CONTROLE DU SEMESTRE S2

EXERCICE 01 — 20 Minutes — 5.5 points

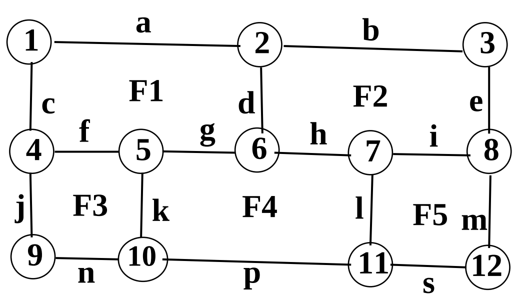
Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante :



1. Donner l'ordre n et le degré moyen D_m **(01 pt)**
2. Trouver une clique dans le graphe **(0.5 pt)**
3. Calculer les deux similarités Cosine(2, 6), Jaccard(2,5), et dites que signifient les résultats obtenus ? **(02 pts)**
4. Calculer le degré normalisé de centralité pour les deux sommets 3, 5 **(01 pt)**
5. Calculer le degré de centralisation du graphe C_D **(01 pt)**

EXERCICE 02 — 30 Minutes — 06 points

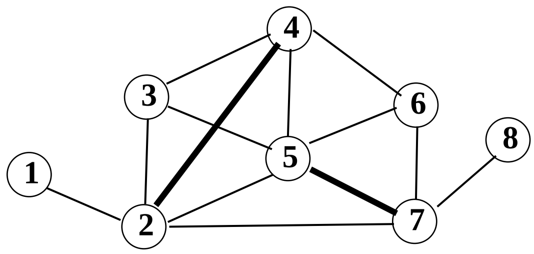
Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante : **(03 pts + 03 pts)**



1. Comment colorer les arêtes de la figure de sorte que Deux arêtes adjacentes ne doivent pas porter la même couleur ?
2. Appliquer la même procédure de coloriage sur les faces de la figure.

EXERCICE 03 — 20 Minutes — 5.0 points

On définit le couplage C = {(2, 4), (5, 7)} avec |C|=2



1. Ce couplage est-il maximum ? **(01 pt)**
2. Trouver une chaîne augmentant C_a **(01 pt)**
3. Maximiser C **(02 pt)**
4. Comment appeler le couplage obtenu ? **(01 pt)**

EXERCICE 04 — 20 Minutes — 04 points

Une compagnie de location de taxis dispose de quatre véhicules libres et doit transporter quatre clients. Le but de la compagnie est d'assigner un taxi par client en minimisant la somme des distances parcourues. Les distances respectives (en kilomètres) entre les taxis et les voyageurs sont données par le tableau suivant :

Distance	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Taxi 1	6	3	4	5
Taxi 2	4	5	4	6
Taxi 3	5	6	6	7
Taxi 4	4	4	3	5

Donner une solution optimale qui minimise les distances des clients par rapport aux taxis

Bon Courage

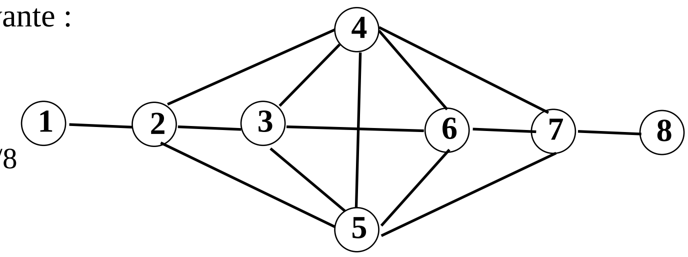
Resp.Module : Dr. KADRI. S

Faculté des mathématiques et de l'informatique	Date : 27.05.2021	Niveau : 1ère Année Master IDO
Département d'informatique	Durée : 01 H 30 Mn	Module : Théorie des graphes avancée

CONTROLE DU SEMESTRE S2

EXERCICE 01 — 20 Minutes — 5.5 points

Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante :



1. Donner l'ordre n et le degré moyen D_m **(01 pt)**

Ordre n=8 ; Degré Moyen Dm = (1+4+4+5+5+4+4+1)/8
= 28/8 = 7/2 = 3.5

2. Trouver une clique dans le graphe **(0.5 pt)**
   Une clique dans G : {3, 4, 5, 6}
3. Calculer les deux similarités Cosine(2, 6), Jaccard(2,5), et dites que signifient les résultats obtenus ? **(02 pts)**

$$\text{Cos}(2, 6) = \frac{|N2 \cap N6|}{\sqrt{|N2|.|N7|}} = \frac{|\{3,4,5\}|}{\sqrt{|\{1,3,4,5\}|.|\{3,4,5,7\}|}} = \frac{3}{\sqrt{4.4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{Jacc}(2, 5) = \frac{|N2 \cap N5|}{|N2 \cup N5|} = \frac{|\{3,4\}|}{|\{1,3,4,5\} \cup \{2,6,7\}|} = \frac{2}{7} \approx 0.28$$

Le premier résultat Cos(2, 6) signifie que les deux sommets 2 et 6 sont similaires à 75%
Le deuxième résultat Jacc(2, 5) signifie que les deux sommets 2 et 5 sont faiblement similaires

4. Calculer le degré normalisé de centralité pour les deux sommets 3, 5 **(01 pt)**

$$C'_D(3) = \frac{d(3)}{N-1} = \frac{4}{8-1} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

$$C'_D(5) = \frac{d(5)}{N-1} = \frac{5}{8-1} = \frac{5}{7} \approx 0.71$$

5. Calculer le degré de centralisation du graphe C_D **(01 pt)**

$$C_D = \frac{\sum_i^n \left(C_D(n^*) - C_D(i)\right)}{(N-1)(N-2)}$$

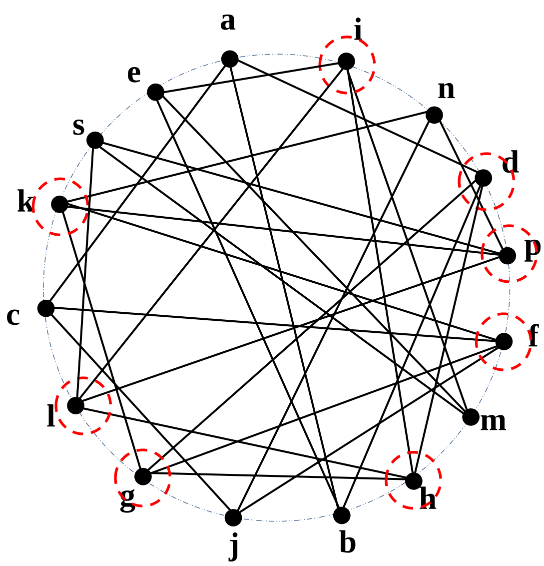
$$= \frac{[(5-1)+(5-4)+(5-4)+(5-5)+(5-5)+(5-4)+(5-4)+(5-1)}{(8-1)(8-2)} = \frac{4+1+1+0+0+1+1+4}{7*6}$$

$$= \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \cong 0.28$$

EXERCICE 02 — 15 Minutes — 06 points

1. Proposer un coloriage minimum pour les arêtes

On trace un graphe dont les sommets sont les segments et les arêtes envisagent leurs intersections. (le graphe adjoint du graphe G) **(01 pt)**



Maintenant, on applique l'algorithme de Welch Powell sur les arêtes a, b, …, s **(01 pt)**

Sommet	Degré	Couleur
d	4	C1
f	4	C1
g	4	C2
h	4	C3
i	4	C1
k	4	C3
l	4	C2
p	4	C1
a	3	C2
b	3	C3
c	3	C3
e	3	C2
j	3	C2
m	3	C3
n	3	C4
s	3	C4

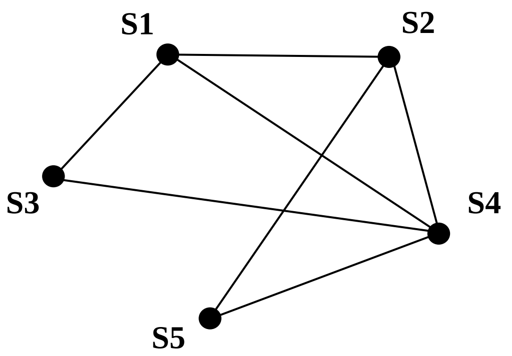
Nb.Couleurs = 4
{d, f, i, p} ==> C1 ; {g, l, a, e, j} ==> C2 ; {h, k, b, c, m} ==> C3 ; {n, s} ==> C4 **(01 pt)**

2. Reprendre la question (1) pour les faces

On trace le graphe dual en représentant chaque face par un sommet, et les arêtes envisagent les frontières communes entre les faces **(01 pt)**

{F1, F2, F3, F4, F5} ==> {S1, S2, S3, S4, S5}

Coloriage: **(01 pt)**

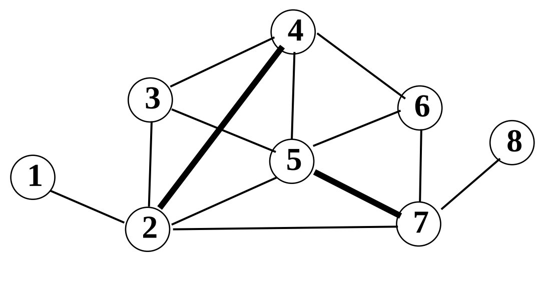


Sommet	Degré	Couleur
S4	4	C1
S1	3	C2
S2	3	C3
S3	2	C3
S5	2	C2

Nb. Couleurs = 03 **(01 pt)**
{F4} ==> {C1}
{F1, F5} ==> {C2}
{F2, F3} ==> {C3}

EXERCICE 03 | **15 Minutes** | **5.0 points**

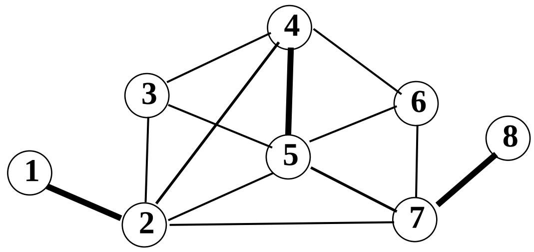
On définit le couplage C = {(2, 4), (5, 7)} avec |C|=2



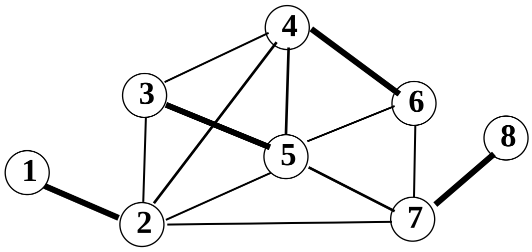
1. Ce couplage est-il maximum ? **(01 pt)**
   Le couplage C n'est pas maximum

2. Trouver une chaîne augmentant C_a **(01 pt)**
   C1 = {1, 2, 4, 5, 7, 8}

3. Maximiser C **(02 pts)**
   * On suit la chaîne C1, on obtiendra



   * ∃une deuxième chaîne augmentante C2 = {6, 4, 5, 3}
   On maximise C selon C2, on obtiendra :



Maintenant, il n'existe aucune chaine augmentante ==>
Le couplage est maximum |C| = 4

4. Comment appeler le couplage obtenu ? **(01 pt)**
   Tous les sommets du couplage sont saturés ==> C est maximum et parfait

EXERCICE 04	**15 Minutes**	**4.0 points**

Il s'agit d'un problème d'affectation ==> On applique l'algorithme hongrois **(02 pts)**

6	3	4	5	-3
4	5	4	6	-4
5	6	6	7	-5
4	4	3	5	-3

3	0	1	2
0	1	0	2
0	1	1	2
1	1	0	2
0	0	0	-2

3	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	2
$\cancel{0}$	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	3
$\boxed{0}$	1	1	$\cancel{0}$	2
1	1	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2

On constate qu'on a un seul zéro encadré dans chaque ligne et chaque colonne ==> arrêter l'algorithme et la solution optimale est : **(01 pt)**

6	$\boxed{3}$	4	5
4	5	4	$\boxed{6}$
$\boxed{5}$	6	6	7
4	4	$\boxed{3}$	5

La distance totale minimale = 3+6+5+3 = 17 **(01 pt)**