Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Optimisation sans contraintes,** **3 ième Année Licence LMD**

Examen de Rattrapage (29 Juin 2021)

Exercice 1 (05 pts):

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.
1) Supposons que g est croissante, montrer que $g \circ f$ est convexe.
2) Application:

a) Si $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(f)$ est convexe sur I, montrer que f est convexe sur I.
b) Donner un exemple montrant que la réciproque de a) est fausse.
c) En déduire la convexité de

$$f(x) = (1+x)^x \text{ sur } I =]0, +\infty[.$$

Exercice 2 (5pts):

I) Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x + y$$

1) Calculer le gradient $\nabla f(x, y)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 f(x, y)$.
2) Calculer les points critiques de f
3) Etudier la natures de ces points critiques.

II) Mêmes questions pour la fonction suivante: $f(x, y) = 2x^2 - y^2$.

Exercice 2 (10 pts):

I) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c.$$

où A est une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que f admet un minimum global unique.
2) Donner le principe général de la méthode de Newton, puis claculer le minimum de f en utilisant cette méthode avec les données suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c = 5.$$

II) On considère maintenant la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - x_2 + 4.$$

1. Ecrire f sous forme matricielle.
2. Montrer qu'il existe un unique $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f(\overline{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x),$$

et le calculer.

3. Calculer deux itérations par l'algorithme du gradient à pas optimal, en partant de $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (0, 0)$.