Chapitre 1

Notions de logique

1.1 Propositions et connecteurs logiques

Définition 1.1 *Une proposition est une phrase qui soit vraie (1) ou fausse (0), mais pas les deux en même temps.*

Exemple 1.1 *(P_1) "Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cotés de l'angle droit" est une proposition vraie.*

(P_2) "$3 \times 2 = 9$" est une proposition fausse.

(P_3) "pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$" est une proposition vraie.

Soient P et Q deux propositions, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

La négation La négation d'une proposition P notée $\overline{P}$ et se lit (non P) est définie de la manière suivante :

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

La conjonction

La conjonction de deux propositions P et Q notée symboliquement par $P \wedge Q$ et se lit (P et Q) est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies.

Le tableau suivant donne les valeurs de vérité de $P \wedge Q$ en fonction de celles de P et de Q

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction

La disjonction de deux propositions P et Q notée symboliquement par $P \vee Q$ et se lit (P ou Q) est vraie si l'une (au moins) des deux propositions P ou Q est vraie.

Le tableau suivant donne les valeurs de vérité de $P \vee Q$ en fonction de celles de P et de Q

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication Le connecteur "$\Rightarrow$" est appelé le connecteur d'implication est sa définition mathématique est la suivante

$$\boxed{(\overline{P} \vee Q) \text{ est notée } (P \Rightarrow Q)}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de vérité de $P \Rightarrow Q$ en fonction de celles de P et de Q

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque 1.1 *Soient P et Q deux propositions, dans la formule $P \Rightarrow Q$, P est appelée l'hypothèse et Q la conséquence.*

L'équivalence

L'équivalence est définie par :

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P) \text{ est notée } (P \Leftrightarrow Q)}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ en fonction de celles de P et de Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Proposition 1.1 *Soient P, Q, R trois propositions. Nous avons les équivalences suivantes :*

(1) $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ *Involution ;*

(2) $(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ *Les lois de De Morgan ;*

(3) $(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$ *;*

(4) $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ *;*

(5) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$ *Idempotence ;*

(6) $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ *;*

(7) $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ *Associativité ;*

(8) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ *;*

(9) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ *Distributivité ;*

(10) $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$ *;*

(11) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ *loi de contraposition.*

Preuve: On démontre la propriété (10)

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

■

1.2 Les quantificateurs

Quantificateurs existentiel
La formule

$$\exists x \in E \mid P(x)$$

est une formule vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit " il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie ".

Exemple 1.2 *(1) $P_1 : \exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1$ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).*

(2) $P_2 : \exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq x$ est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).

Quantificateurs universel
La formule

$$\forall x \in E : P(x)$$

est une formule vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Exemple 1.3 *$P : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ est fausse.*

1.2.1 Propriétés des quantificateurs

La négation des quantificateurs
Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction des éléments x de E. Alors

$$\overline{\forall x \in E : P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E \mid \overline{P(x)}$$
$$\overline{\exists x \in E \mid P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E : \overline{P(x)}$$

Exemple 1.4 *La négation de "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$" est "$\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0$"*

Remarque 1.2 *L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y > 0 \qquad\qquad \exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : x + y > 0$$

sont différentes. La première affirme "Pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que $x+y > 0$" (par exemple on peut prendre $y = |x|+1$). C'est donc vraie. Par contre la deuxième "Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, $x + y > 0$" est fausse, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x.

1.3 Types de raisonnements

Voici quelques méthodes classiques de raisonnements.

1.3.1 Raisonnement direct

Pour montrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.5 *Si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*
$a = \frac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ pour $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$. Donc,

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{Z}^*$. Donc $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.3.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre la proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.

Exemple 1.6 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$. Nous distinguons deux cas.*
Premier cas : $x \geq 1$, alors $|x - 1| = x - 1$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$.
Deuxième cas : $x < 1$, alors $|x - 1| = -(x - 1)$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$.
Et donc $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
Conclusion. Dans tous les cas $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

1.3.3 Contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il faut et il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.7 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*
Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in N$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.4 Absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie.

Aussi, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exemple 1.8 *Montrer que 0 n'est pas racine de $A(x) = x^4 + 12x - 1$. On raisonne par l'absurde. Supposons que 0 soit racine de A. Par définition, on aurait donc $A(0) = 0$; or le calcul montre que $A(0) = -1$, d'où $-1 = 0$. On obtient une contradiction.*

Exemple 1.9 *Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Puisque a^2 est pair, a est pair et $a = 2p$ où p est un entier positif. Alors, $b^2 = 2p^2$. Puisque b^2 est pair, b est pair. Par conséquent, il est possible de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit l'hypothèse que a, b sont premiers entre eux. D'où, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une formule du type "$\forall x \in E : P(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette formule est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Exemple 1.10 *Montrer que la formule suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés".*

Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.3.6 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer que $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'initialisation on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n > 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que $P(n + 1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.11 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.*

Pour $n > 0$, notons $P(n)$ comme suivante : $2^n > n$. Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n > 0$.

Initialisation *: Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité *: Fixons $n > 0$ et supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.*

$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$ car par $P(n)$ nous savons $2^n > n$, et comme $2^n > 1$ on trouve $n + 2^n > n + 1$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion *: Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n > 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n > 0$.*