Chapitre 1

DISTRIBUTIONS

Dans la suite de ce programme on s'intéresse à l'espace dual de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact.

1.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.1 (Support d'une fonction) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$). Le support de φ, noté* $\operatorname{supp}\varphi$*, est défini par*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{A}, \quad \textit{où} \quad A = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.2 (L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$) de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont les $\operatorname{supp}\varphi$ *sont bornés.*

Comme $\operatorname{supp}\varphi$ est fermé, donc il est un compact dans $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact.

Remark 1.1 Les assertions suivantes sont faciles à vérifier :
(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.
(b) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_j\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^2_{j,k}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,..., $(j, k = 1, \ldots, n)$, etc.
(c) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

L'exemple suivant est essetiel dans la suite car il montre que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est non vide

Exemple 1.1 (Exemple fondamental) *Dans $\mathbb{R}^n$, soit*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & si \quad |x| < 1, \\ 0 & si \quad |x| \geq 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

si on considère la fonction "forte" :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad |x| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

on a $\varphi(x) = \Pi\left(\frac{|x|}{2}\right)\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right)$. Rappelons que $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.
Dans $\mathbb{R}$, il suffit de remplacer dans (1.1) la variable $|x|$ par x.

Définition 1.3 (La convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)
Une suite des fonctions $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $n \to +\infty$, si on a :
(a) *Il existe un ensemble B borné de $\mathbb{R}^n$ tel que* $\operatorname{supp} \varphi_n \subset B$.
(b) *Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ fixé, la suite $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$. C'est-à-dire qu'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^n.$$

On termine ce paragraphe par une application dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui consiste à montrer qu'on peut écrir une fonction constante $f(x) := c$ comme étant la somme des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

Théorèm 1.1 (Partition de l'unité)
Il existe une suite des fonctions $(\varphi_j)_j$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Preuve. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, une fonction positive à support dans la boule $|x| \leq 2$ et telle que $\theta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Posons

$$\psi(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta(x+j).$$

Alors $\psi(x) \geq 1$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Posons ensuite $\varphi(x) := \frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ et $\varphi_j(x) := \varphi(x+j)$. Alors les fonctions φ_j sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, elles vérifient aussi l'égalité (1.2). ■

1.2 Espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Voici la définition de l'espace des distributions noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Aussi les distributions d'ordre fini :

Définition 1.4 (de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) *Toute application linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est appelée une distribution. Explicitement, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on doit écrire et vérifier :*
- *on écrit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to T(\varphi)$ ou en général $\langle T, \varphi\rangle$, i.e.,*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}.$$

- *on vérifie $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\langle T, \varphi + \lambda\psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \lambda\langle T, \psi\rangle.$$

- *on vérifie aussi*

$$\langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$
$$\langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n).$$

L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.5 *Une distribution T est dite d'ordre N, si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\left|\langle T, \varphi\rangle\right| \leq c \sum_{j\leq N} \sup_{x\in K} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K),$$

la constante positive c dépende de K.

Il exsite deux types de distributions :

1.2.1 Distributions régulières

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), telle que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire,

$$\forall \text{ compact } K \subset \mathbb{R}^n : \int_K |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ existe ($\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) car φ est nulle à l'extérieur d'un ensemble borné, alors f définie une distribution, noteé T_f, telle que

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Remark 1.2 Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \quad \text{p.p.}$$

Définition 1.6 (Distribution régulière)
Toute distribution définie par (1.3) est dite distribution régulière, c-à-d si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors T_f est une distribution régulière.

1.2.2 Distributions singulières

La distribution de Dirac δ (resp. δ_a) est défini par

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \text{à l'origine},$$

resp.

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \text{au point } a \in \mathbb{R}^n.$$

Elle représente la charge (ou la masse) à l'origine (resp. au point a) par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

resp.

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq a \\ +\infty & \text{si} \quad x = a. \end{cases}$$

Théorèm 1.2 *La distribution de Dirac n'est pas une distribution régulière.*

Preuve. Il suffit de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\delta = T_f$, i.e.

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.4}$$

Comme $f = 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n$ alors $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$ pour presque tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On choisit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(0) = 1$ on obtient une contradiction. ∎

1.2.3 Exemples

1. La valeur principale : Considérons la distribution $\mathrm{pv}\frac{1}{x}$ définie par :

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|\geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})). \tag{1.5}$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{supp} \varphi = K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq M\}$; on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ avec } \sup_{x\in K} |\psi(x)| \leq c \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|,$$

donc

$$\begin{aligned} \Big| \int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\varphi(0) \int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K} \psi(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq |\varphi(0)| \Big| \int_{\epsilon\leq|x|\leq M} \frac{1}{x}\mathrm{d}x\Big| + \Big| \int_{\epsilon\leq|x|\leq M} \psi(x)\mathrm{d}x\Big|. \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\epsilon\leq|x|\leq M} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \Big(\int_{-M}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{M} \Big)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0,$$

par contre

$$\Big| \int_{\epsilon\leq|x|\leq M} \psi(x)\mathrm{d}x\Big| \leq 2M \sup_{|x|\leq M} |\psi(x)| \leq c' \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

Ce qui donne

$$\big|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\big| \leq c \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|. \tag{1.6}$$

La formule (1.6) montre que $vp\frac{1}{x}$ est d'ordre 1.

2. Une inégalité pour des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: Dans $\mathbb{R}^n$, il existe $c = c(n) > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \leq c \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\big|^2 \mathrm{d}x, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.7}$$

En effet, par intégration par partie par rapport à la composante $j$ème on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = -2\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^n} x_j \psi(x) \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x, \quad (\forall j = 1, \dots, n,\ \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3. Une distribution dans $\mathbb{R}^n$: Soit $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Nous avons par les coordonnées polaires

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

ce qui montre que $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$, donc on définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ par T_f. Il en est de même en dimension supérieure, T_f avec $f(x) = \frac{1}{|x|}$, si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$ sinon., en considérons le changement de variables en coordonnées sphérique dans $\mathbb{R}^n$, c-à-d :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x &\leq \int_{|x'|=1}\int_0^1 t^{n-1}f(tx')\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma_{x'}\\ &= \int_{|x'|=1}\int_0^1 t^{n-1}t\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma_{x'} = \frac{1}{n}\nu(n)\end{aligned}$$

où $\nu(n) := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+(n/2))}$ est le volume de la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^n$, tracer la fonction

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]a,b[, \\ \exp \frac{1}{2}\{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\} & \text{si} \quad x \in]a,b[, \end{cases}$$

dans les cas : $b = a = 1$, $b = 2a = 2$.

2. Démontrer que les applications suivantes définissent des distributions (préciser l'ordre) :
(a)

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{|x|\leq 1} \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

(b)

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha|\leq N} \varphi^{(\alpha)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

(c)

$$\langle \mathrm{pf}\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Big\{ \int_{|x|\geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \Big\}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(d)

$$\langle \mathrm{pf}\frac{H}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Big\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\log\epsilon \Big\}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Indications pour les solutions de l'exercice 2
(a) La fonction caractéristique sur $|x| \leq 1$ est dans $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, elle est d'ordre 0.
(b) Nous avons $T = \sum_{|\alpha|\leq N}(-1)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}$, de plus

$$\langle T, \varphi \rangle \leq \sum_{|\alpha|\leq N} |\varphi^{(\alpha)}(0)| \leq \sum_{|\alpha|\leq N} \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty,$$

elle est d'ordre $\leq N$.
(c) On écrit :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x) \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \sup_{|x|\leq M} |\psi(x)| \leq c \sup_{|x|\leq M} |\varphi''(x)|,$$

où M est défini par $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M\}$. Un simple calcul donne ce qui donne

$$|\langle \mathrm{pf}\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle| \leq c \sum_{j=0}^{2} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

(d) La même façon que (c).