Chapitre 2

Opérations sur les distributions

2.1 Opérations élémentaires

2.1.1 Addition

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables, on définit l'addition par

$$\begin{aligned}\langle T_f + T_g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_g, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

d'où la formule

$$\langle T_f + T_g, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_g, \varphi\rangle.$$

2.1.2 Multiplication

• Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit αT a un sens et $\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ déninie par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle.$$

Remark 2.1

1. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $\alpha T_f = T_{\alpha f}$.
2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $xT = 0$ alors $T = c^{\mathrm{te}}\delta$.
   En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = 0 \quad \begin{cases} \text{si} \quad x \neq 0 \Rightarrow T = 0, \\ \text{si} \quad x = 0 \quad (T \neq 0), \end{cases}$$

   d'où T peut s'identifier à la distribution de Dirac par une constante.

2.1.3 Translation et homothétie

• On note $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de translation au point $a \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in L^1_{loc}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x.$$

D'où on obtient la formule

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a})\varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

• De même, $h_\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ fixé, est l'opérateur de d'homothétie.
Si $f \in L^1_{loc}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{\lambda^n},$$

d'où on obient la formule

$$\langle h_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\langle T, h_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Exemple 2.1 *1.* $\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$.

2. $\langle h_\lambda \delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\langle \delta, h_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\varphi(0) = \frac{1}{\lambda^n}\langle \delta, \varphi \rangle$.

D'où $\tau_a \delta = \delta_a$ *et* $h_\lambda \delta = \frac{1}{\lambda^n}\delta$.

2.2 Dérivation

C'est la partie la plus intéréssante dans les opérations sur les distributions.
Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ on a par une intégration par partie à la $j$ème composante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

D'où on tire la formule suivante (sous forme de définition) :

Définition 2.1 *On définit la dérivation dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *par la formule :*

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Il découle alors pour un ordre supérieur

$$\langle T^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi^{(\alpha)} \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Exemple 2.2 *Dans* $\mathbb{R}$ *on a* $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$ *pour tout* $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

2.2.1 Exemples de dérivation

a) δ (masse de Dirac), on a vu déjà que

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

b) H (Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

D'où $H' = \delta$.

c) $\log|x|$ (dans le cas $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\langle(\log|x|)', \varphi\rangle = -\langle\log|x|, \varphi'\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\Big)\log|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x\Big\}.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{+\infty}\varphi'(x)\log x\mathrm{d}x &= -\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x - \varphi(\epsilon)\log\epsilon \\ \int_{-\infty}^{-\epsilon}\varphi'(x)\log(-x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \varphi(-\epsilon)\log\epsilon.\end{aligned}$$

Comme $|\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)| \leq 2\epsilon\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|$ (d'après le théorème des accroissements finis) et que $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon\log\epsilon = 0$, et comme aussi

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\Big)\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big\} = \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

on a alors $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

d) x_+^λ, $-1 < \lambda < 0$ (i.e., $x_+^\lambda := H(x)x^\lambda$), (dans le cas $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\langle(x_+^\lambda)', \varphi\rangle = -\langle x_+^\lambda, \varphi'\rangle &= -\int_0^{+\infty} x^\lambda\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon}^{+\infty} x^\lambda\mathrm{d}(\varphi(x)+c), \quad \text{avec on choix, } c = -1 \\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big[\lambda\int_{\epsilon}^{+\infty} x^{\lambda-1}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\mathrm{d}x - \big[x^\lambda\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\big]_{\epsilon}^{+\infty}\Big] \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où on peut définir la dérivée $(x_+^\lambda)'$ par cette dernière formule.

e) $\log(x+\mathrm{i}0)$, $\log(-x+\mathrm{i}0)$
On sait que $\log(x+\mathrm{i}\epsilon) = \log|x+\mathrm{i}\epsilon| + \mathrm{i}\arg(x+\mathrm{i}\epsilon)$ quand $\epsilon\downarrow 0$, on a alors

$$\log(x+\mathrm{i}0) = \log|x| + \mathrm{i}\pi H(-x).$$

En effet, soit $\theta = \lim_{\epsilon\to 0}\theta_\epsilon$ où θ_ϵ est définit par $\theta_\epsilon = \arg(x+\mathrm{i}\epsilon)$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\arg(x+\mathrm{i}\epsilon) = \pi H(-x), \quad \text{car} \begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0.\end{cases} \\ \sin\theta = 0,\end{cases}$$

donc $\theta = 0$ si $x > 0$ et $\theta = \pi$ si $x < 0$. D'où

$$\big(\log(x+\mathrm{i}0)\big)' = \mathrm{vp}\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta,$$

de même

$$\big(\log(-x+\mathrm{i}0)\big)' = \mathrm{vp}\frac{1}{x} + \mathrm{i}\pi\delta.$$

2.3 La convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.2 *Soit (T_j) une suite d'éléments dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T_j converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $\lim_{j\to\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

On obtient quelques propriétés simples à vérifier :
- Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial_k T_j \to \partial_k T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\alpha T_j \to \alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, alors $\tau_a T_j \to \tau_a T$ et $h_\lambda T_j \to h_\lambda T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.3 *Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Soit $T_j := T_{j^n f(j\cdot)}$. Calculons $\lim_{j\to\infty} T_j$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous avons*

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} j^n f(jx)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)]\mathrm{d}x + \varphi(0)$$

Nous avons aussi
- $\lim_{j\to\infty} f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)] = 0$
- $|f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)]| \leq 2\|\varphi\|_\infty |f(x)|$, *avec* $\|\varphi\|_\infty f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

en appliquant donc le théorème de la convergence dominée on obtient $\lim_{j\to\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \varphi(0)$, *c-à-d* $\lim_{j\to\infty} T_j = \delta$. ■

De l'Exemple 2.3, on observe que $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \delta$ (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) malgré que f est une fonction intégrable. Nous allons voir maintenant un exemple où la limite au sens de fonctions n'existe pas, cependant elle existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.4 *Soit $f_j(x) := \sin(jx)$, $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ n'existe pas. Calculons alors cette limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On pose $T_j := T_{f_j}$. On a $\sin(jx) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, puisque $|\sin(jx)| \leq 1$, donc $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de plus par intégration par partie on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Nous avons
- $\lim_{j\to\infty} \dfrac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x) = 0$ *puisque* $\left|\dfrac{\cos(jx)}{n}\varphi'(x)\right| \leq \dfrac{1}{j}\|\varphi'\|_\infty$
- $\left|\dfrac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x)\right| \leq |\varphi'(x)|$ *avec* $\varphi' \in L_1(\mathbb{R})$.

Par le théorème de la convergence dominée on obtient $\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$, c-à-d $\lim_{j\to\infty} T_j = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On peut éviter le théorème de la convergence dominée par le fait que d'après (2.1) on

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{j}\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \frac{\|\varphi'\|_1}{j} \to 0 \quad \text{quand} \quad j \to +\infty.$$

■

Exemple 2.5 *Soit* $T_j := \dfrac{\sin(jx)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Calculons* $\lim_{j\to\infty} T_j$. *On a* $\dfrac{\sin(jx)}{x} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *puisque* $\left|\dfrac{\sin(jx)}{x}\right| \le j$, *donc* T_j *est un élément de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *On a (pour* $0 < \theta < 1$*) :*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(jx)}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(jx)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x$$
$$= \pi\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x.$$

mais d'après l'Exemple 2.4 on a $\lim_{j\to\inf}\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x = 0$. *Donc* $\lim_{j\to\infty} T_j = \pi\delta$. ■

Exemple 2.6 *Appliqons l'Exemple 2.3 avec la fonction* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Nou savons alors*
– $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{j\to\infty} j^n e^{-j^2x^2} = 0$,
– $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, *puisque* $\lim_{j\to\infty} T_j = \lim_{j\to\infty} T_{j^n f(j\cdot)} = \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

■

2.4 Exercices

1. Dans $\mathbb{R}$. Calculer au sens de distributions

$$T = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\Big)H(x)e^{\lambda x}, \quad S = \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2\Big)H(x)\frac{\sin kx}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

où H est la fonction de Heaviside.

2. Même question dans $\mathbb{R}$: $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|)$, $T_2 = \big(H(x)\cos\pi x\big)'$, $T_3 = \big(H(x)\sin\pi x\big)'$.
Indications de solution :
$T_1 = \operatorname{sgn} x$,
$T_2 = H'(x)\cos\pi x - \pi H(x)\sin\pi x = \delta - \pi H(x)\sin\pi x$,
$T_3 == H'(x)\sin\pi x + \pi H(x)\cos\pi x = \delta\sin\pi x + \pi H(x)\cos\pi x = \pi H(x)\cos\pi x$. ■

3. Même question dans $\mathbb{R}^n$: $T = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}H(x)$ où $H(x) = 1$ si $x_j \ge 0$ et $H(x) = 0$ si $x_j < 0$ et $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = n$.
Indications de solution :
Nous avons

$$\langle \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}H, \varphi = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Maintenant il suffit d'intégrer comme suit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^\infty \dots \int_0^{\infty_1} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^\alpha}\varphi(0,x')\mathrm{d}x' \quad |\alpha_1| = n-1, x' = (x_2,...,x_n)\\ &= (-1)^2 \int_0^\infty \dots \int_0^{\infty_2} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^\alpha}\varphi(0,x'')\mathrm{d}x'' \quad |\alpha_2| = n-2, x'' = (x_3,...,x_n)\\ &....\\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

Ainsi $T = \delta$. ■

4. Dans $\mathbb{R}$. Soit $f(x) := \begin{cases} e^x & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0. \end{cases}$ Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et Calculer sa dérivée.
Même question pour T_g avec $g(x) = e^{x^3+x^2+x}$ si $x \geq 0$, $g(x) = 0$ si $x < 0$.
Indications de solution :
Comme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \infty$ (un calcul simple) on a $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Donc $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Maintenant $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ona

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = \int_0^\infty e^x \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) + \int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi $T_f' = \delta + T_f$.
Pour T_g, on a $g = f \circ h$ où $h(x) := x^3 + x^2 + x$. Alors comme $T_g = T_{f\circ h}$, on ontient que $T_g' = h'T_{f\circ h}'$, c-à-d $T_g' = (3x^2+2x+1)(\delta + T_{f\circ h})$, mais $(3x^2+2x+1)\delta = \delta$, donc $T_g' = \delta + (3x^2+2x+1)T_{f\circ h}$. ■

5. Dans $\mathbb{R}$. (a) En appliquant la formule de Leibniz à la fonction $x^p\varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\big(x^p\varphi(x)\big)_{|x=0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > q, \\ C_q^p p!\varphi^{(q-p)}(0) & \text{si} \quad p \leq q. \end{cases}$$

(b) En déduire l'expression exacte de la distribution $T = x^p\delta^{(q)}$. (Solution. $T = 0$ si $p > q$, $T = C_q^p p!\delta^{(q-p)}$ si $p \leq q$).

5. Dans $\mathbb{R}$. Soit $T_n = \frac{1}{2n}|x|^{\frac{1}{n}-1}$. (a) Démontrer $T_n \in \mathcal{D}'$.
(b) Démontrer que T_n converge vers δ.