Chapitre 3

Produit de convolution des distributions

3.1 Produit tensoriel

Définition 3.1 *Soient φ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ est défini par*

$$\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (\varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)),$$

avec $\operatorname{supp} \varphi \otimes \psi = \operatorname{supp} \varphi \times \operatorname{supp} \psi$.

On accepte le résultat suivant : Il existe une distribution unique $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\langle U, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle.$$

On écrit aussi $U = S \otimes T$.
Pour la dérivation, on écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(S_x \otimes T_y) = \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} \otimes T_y,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(S_x \otimes T_y) = S_x \otimes \frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}y}.$$

3.2 Produit de convolution de deux fonctions

Définition 3.2 *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. On définit produit de convolution de f par g la fonction*

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$$

Si on fait le changement de variable $x - y = z$, il vient que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z)g(z)\mathrm{d}z = g * f(x),$$

d'où la commutativité de la convolution, c-à-d

$$f * g = g * f.$$

Il en est de même pour l'associativité.

Théorèm 3.1 *Le produit de convolution est commutatif et associatif.*

3.3 Produit de convolution des distributions

Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$:

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(u)\varphi(y+u)\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\langle T_g, \varphi(y+\cdot)\rangle \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\langle T_f, \varphi(\cdot+u)\rangle \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Ce calcul n'est justifié, mais on l'accepte formelement. Ce qui ramène à la définition suivante :

– *Soient S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit de convolution de S par T par la formule*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Cette définition n'est pas tout à fait correcte, car dans le 2è le terme $\langle T_y, \varphi(x+y)\rangle$ peut n'appartenir pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par conséquent $\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$ n'est pas défini.

3.4 Convolution avec une distribution à support compact

Définition 3.3 (Distribution à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit qu'une distribution T est nulle sur U si*

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad \operatorname{supp}\varphi \subset U.$$

On dit alors que $C_{\mathbb{R}^n}U$ (le complémentaire de U dans $\mathbb{R}^n$) est le support de T.

Exemple 3.1 *1-* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$ *(i.e., $\varphi(0) = 0$), on a directement*

$$\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{supp}\delta = \{0\}.$$

2- $\operatorname{supp} H = [0, +\infty]$.
3- $\operatorname{supp} \mathrm{pv}\frac{1}{x} = [-\infty, +\infty]$.

Remark 3.1 On considère (et on choisit toujours) que le $\operatorname{supp} T$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

3.5 Propriétés

a) Dérivation :

$$\partial_j(S * T) = \partial_j S * T = S * \partial_j T.$$

Exemple 3.2 $H' * 1 = \delta * 1 = 1.$

L'egalité a) est vraie que lorsque $S * T$ existe, car :

$$S * T \text{ existe} \Rightarrow \partial_j S * T \text{ et } S * \partial_j T \text{ existent.}$$

Par contre, la réciproque est fausse, en effet

$$H' * 1 = 1, \quad H * 1' = H * 0 = 0, \quad (1 \neq 0),$$

alprs $H * 1$ n'existe pas.

b) Convolution par δ :

$$\begin{aligned}\langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle = \langle T_y, \langle \delta_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, \varphi(y) \rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

c) Convolution par $\partial_j \delta$:

$$\begin{aligned}\langle \partial_j \delta * T, \varphi \rangle &= \langle T_y, \langle \partial_j \delta_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle = -\langle T_y, \partial_j \varphi(y) \rangle \\ &= \langle \partial_j T, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_j \delta * T = T * \partial_j \delta = \partial_j T.$$

De même pour les dérivées d'ordre supérieur à 1.

Remark 3.2

1. On définit la convolution des distributions et des fonctions par : $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou bien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), on a
$$x \to T * \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \quad T * \varphi(x) = \langle T_t, \varphi(t - \cdot) \rangle.$$
En particulier, $T * \varphi(0) = \langle T_t, \varphi \rangle$.
2. On définit la convolution de deux distributions dont l'une est à support compact par : $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ implique $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$
En particulier, $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{S * \widetilde{\varphi}} \rangle$, avec $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

On a les propriétés suivantes qui sont faciles à vérifier :
Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T * S = S * T, \quad S * (T * U) = (S * T) * U,$$

$$\partial^\alpha (S * T) = \partial^\alpha S * T = S * \partial^\alpha T,$$

avec

$$\operatorname{supp} S * T \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T.$$

3.6 Equation de convolution

Soient S et T deux distributions données, cherchons la solutions de l'équation

$$S * X = T. \tag{3.1}$$

Si S admet une distribution notée S^{-1} telle que

$$S^{-1} * S = \delta,$$

alors il suffit de multiplier (3.1) par S^{-1} pour obtenir la solution :

$$X = S^{-1} * T.$$

Exemple 3.3 *On sait que $H' = \delta$. Alors l'équation*
$\delta' * X = T$ amet comme solution $X = H * T$ car $\delta' * H = \delta$.

3.7 Exercices

1. Soit $a > 0$, on pose

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < a, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq a. \end{cases}$$

(a) Calculer $f_b * f_a$ pour $a < b$.
(b) Même question $g_b * g_a$ et $h_b * h_a$ où

$$g_a(x) = x f_a(x), \quad h_a(x) = x^2 f_a(x).$$

2. Soient T_1 et $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$. Calculer $T_1 * T_2$ dans les cas suivants
$T_1 = \delta'$, $T_2 = T$ quelconque.
$T_1 = H'$, $T_2 = 1$.
$T_1 = 1$, $T_2 = H'$.
$T_1 = 1 * \delta'$, $T_2 = H$.
$T_1 = 1$, $T_2 = \delta' * H$.
$T_1 = H(x)\cos x$, $T_2 = H(x)\sin x$.
$T_1 = (1 - x)H(x)$, $T_2 = e^x H(x)$.

3. Calculer $(1 * \delta') * H$ et $1 * (\delta' * H)$.

4. Calculer $f * g$ dans les cas suivants :
(i) $f(x) = H(x)\sin x$, $g(x) = H(x)\cos x$.
(ii) $f(x) = (1 - x)H(x)$, $g(x) = e^x H(x)$.

5- Soient S et T deux distributions telle que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Démontrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta|_{\operatorname{supp} T} = 1$ vérifiant

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \theta(y)\varphi(x + y) \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Indication il suffit de considérer $T = T_f$ avec f est à support compact puis choisir θ telle que $\theta f = f$.