Université de M'Sila
Faculté des MathÃẹmatiques et d'Informatique / Département de Mathématiques
Master Maths. **S 1/ Analyse Mathématiques et Numériques**
– ***Distributions I*** –

<u>Devoir maison</u> Janvier 2022

À rendre le jour de l'examen final

** Utiliser les notations du cours
** On tiendra compte de la prśentation des copies

Exercice 1. (1) Donner la définition de : – une distribution régulière, – une distribution singulière, - la norme dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, – la dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, – la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, – la convolution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Les distributions $vp\frac{1}{x}$, H et δ.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$ soit $T = x \log |x|$. Démontrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer T'.

Exercice 3. (1) On rappelle que $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Soit $T = 2x + 1$.

Calculer $(x^2 + x)\,\delta_2'' \,,\quad T * (\delta_1 - \delta_2)$.

(2) Soient $f(x) := \begin{cases} 1 & si \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Calculer $f * f \,,\quad f * f * f$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}$. (a) En appliquant la formule de Leibniz à la fonction $x^p\varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}x^q}(x^p\varphi(x))_{|x=0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > q, \\ C_q^p p!\varphi^{(q-p)}(0) & \text{si} \quad p \le q. \end{cases}$$

(b) En déduire l'expression exacte de la distribution $T = x^p\delta^{(q)}$.

===============

Le 10.12.2021