

Devoir maison Février 2021

À rendre le jour de l'examen final

** On utilisera les notations du cours

Exercice 1. Dans \mathbb{R} , tracer la fonction

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]a, b[, \\ \exp \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a} \right\} & \text{si } x \in]a, b[, \end{cases}$$

dans le cas : $b = -a = 1$.

Exercice 2. Dans \mathbb{R} . (a) En appliquant la formule de Leibniz à la fonction $x^p \varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\frac{d^q}{dx^q} (x^p \varphi(x)) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > q, \\ C_q^p p! \varphi^{(q-p)}(0) & \text{si } p \leq q. \end{cases}$$

(b) En déduire l'expression exacte de la distribution $T = x^p \delta^{(q)}$.

Exercice 3. Dans \mathbb{R} . Soit $T_n = \frac{1}{2n} |x|^{\frac{1}{n}-1}$. (a) Démontrer que $T_n \in \mathcal{D}'$.

(b) Démontrer que T_n converge vers δ .

=====