1.3 Distributions modulo les polynômes

1.3.1 L'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$

Nous introduisons les notations suivantes : On désigne par
• $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$,
• $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ pour tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré $< m$ (ou $\leq m-1$) avec $m \in \mathbb{N}^*$,
• $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) := \{c\}$ et $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) := \{0\}$.
Il est clair que $m_1 < m_2 \Rightarrow \mathcal{P}_{m_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_{m_2}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.2 Voici quelques exemples dans $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}^2)$: $f_1(x,y) := x + xy^2$, $f_2(x,y) := 1 - 2xy - 3x^3$.

Remarque 1.2 Comme pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times \ldots \times x_n^{\alpha_n}$, alors si $x^\alpha \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ on a $\partial^\beta x^\alpha = 0$ si $|\beta| = m$.

Définition 1.3 *On définit l'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ par les fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ orthogonales à tous polynômes de degré $< m$, i.e.*

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) := \big\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \quad \langle x^\alpha, f \rangle = 0\,,\ |\alpha| < m \big\};$$

l'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ est muni par les mêmes normes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\zeta_M(f) := \sup_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^M |\partial^\alpha f(x)| \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ M \in \mathbb{N}).$$

Gâce à l'égalité $\partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}(-ix^\alpha f)$, cette définition est équivalente à :

$$f \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \quad \textit{alors} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,\ |\alpha| < m\,.$$

Proposition 1.6 *Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $f \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_j f \in \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$. En particulier l'opérateur $\partial_j : \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| < m$. On pose :
— $\beta := (1+\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Alors $|\beta| = |\alpha| + 1 < m+1$.
— $\partial_1 g := \widehat{f}$, c'est-à-dire $-ix\mathcal{F}^{-1} g = f$.
Il vient alors $\partial^\beta g = \partial^\alpha \partial_1 g = \partial^\alpha \widehat{f}$. Par conséquent $g \in \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$. ■

1.3.2 L'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$

En construisant l'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, nous obtiendrons un espace plus grand que l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.4 *L'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, noté $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$, est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, on dit que $f \in \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ si l'application, notée encore f et définie par $f : \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$, est continue. $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace de distributions modulos les polynômes de degré $< m$, on dit aussi que $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de distributions modulos les polynômes.*

Nous revenons à la relation entre $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'_{m+1}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \tag{1.8}$$

voir l'Exercice 1.3.2.
Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ on a la relation d'équivalence suivante :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^2 : \quad f = g \text{ in } \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n),$$

il découle alors $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la classe d'équivalence

$$[f]_m := \big\{ f + p : \ \forall p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \big\}, \tag{1.9}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) = \{ [f]_m : \ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \}. \tag{1.10}$$

NB. : S'il n'y a pas de confusion, les éléments de $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ seront notés par $f, g, ...$
Pour la dérivation on peut avoir l'assertion suivante :

Proposition 1.7 *L'opérteur $-\Delta$ envoi $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Il en est de même pour $(-\Delta)^s$ avec $s \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $\partial^\alpha\big(|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)\big)(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $-\Delta f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, voir (1.7). La même démonstration marche pour $(-\Delta)^s$. ■

Remarque 1.3 De la Proposition 1.7, on peut définir $(-\Delta)^s$ sur $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\big\langle (-\Delta)^s f, \varphi \big\rangle := \big\langle f, (-\Delta)^s \varphi \big\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.4 De la Proposition 1.7, on peut définir $(-\Delta)^s$ sur $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\big\langle (-\Delta)^s f, \varphi \big\rangle := \big\langle f, (-\Delta)^s \varphi \big\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.5 De la formule (1.9) et (1.10), on conclut que l'opérateur

$$T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \quad \text{défini par} \quad T : f \mapsto f_{|\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)}$$

est un isomorphisme.

Exercices

Exercice 1.3.1 Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ si $\partial^\beta f = 0$ si $|\beta| = m$

Exercice 1.3.2 Démonter que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, et que

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Déduire la formule (1.8).

Exercice 1.3.3 Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \notin \operatorname{supp} f$ alors $\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Voici un exemple de telle fonction : Soit la fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

1. $0 \le \rho(\xi) \le 1$,
2. $\rho(\xi) = 1$ si $|\xi| \le 1$,
3. $\rho(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 3/2$, i.e. support de ρ est dans la boule $|\xi| \le 3/2$;

pour construire la fonction ρ, il suffit de poser $\rho(\xi) = g(|\xi|)$ où $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec le support dans $[0, \infty[$ (n'oublions pas que $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$).
On pose $\gamma(\xi) := \rho(\xi) - \rho(2\xi)$, alors on a

1. support de γ est dans la couronne $1/2 \le |\xi| \le 3/2$,
2. $\gamma(\xi) = 1$ si $3/4 \le |\xi| \le 1$.

Enfin $\mathcal{F}^{-1}\gamma \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\varphi = \gamma$.

Exercice 1.3.4 Dans l'Exemple 1.3.3, et à partir de la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \ge 1, \end{cases}$$

construire explicitement les fonctions ρ et γ.
1- Vérifier qu'on a des fonctions dans $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$.
2- Tester les fonctions ρ', ρ'', ...

Exercice 1.3.5 Soit $m \in \mathbb{N}$. Démonter que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_1^m \varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$. N'oublions pas que $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\partial_1^m f(\xi) := \partial_{\xi_1}^m f(\xi)$.

Exercice 1.3.6 Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, démontrer que $\widehat{x^\alpha} = i^{|\alpha|}(2\pi)^n \delta^{(\alpha)}$. En déduire que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^2 : \quad f = g \text{ in } \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \operatorname{supp} \widehat{f - g} = \{0\}.$$

Exercice 1.3.7 En utilisant la Remarque 1.4, démontrer dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'égalité

$$(-\Delta)^{s_1+s_2} = (-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2}.$$

Faire une comparaison avec la dérivation usuelle.

Exercice 1.3.8 Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur de Riesz par $\mathcal{I}_s := (-\Delta)^{-s/2}$.

1. Démontrer que
$$\widehat{\mathcal{I}_s f}(\xi) := |\xi|^{-s} \widehat{f}(\xi)\,, \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)).$$
2. Démontrer que
$$\left\langle \mathcal{I}_s f, \varphi \right\rangle := \left\langle f, \mathcal{I}_\varphi \right\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$
3. En utilisant la Remarque 1.4, démontrer dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'égalité $\mathcal{I}_{s_1+s_2} = \mathcal{I}_{s_1} \circ \mathcal{I}_{s_2}$. Faire une comparaison avec la dérivation usuelle.

1.4 Décomposition de Littlewood-Paley

Dans tout ce qui suit, nous allons utiliser les deux fonctions ρ et γ définies dans l'Exemple 1.3. Si $j \in \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on désigne par g_j la fonction $g_j(x) := 2^{jn} g(2^j x)$, c'est-à-dire $\widehat{g}_j(\xi) = \widehat{g}(2^{-j}\xi)$; is $\lambda > 0$ on désigne aussi par g_λ la fonction $g_\lambda(x) := \lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x)$, c'est-à-dire $\widehat{g}_\lambda(\xi) = \widehat{g}(\lambda\xi)$.

1.4.1 Préparation

On commence par une relation de convolution entre les fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.3 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que l'inégalité*

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c\, 2^{-jN}\, \zeta_{M+n+2}(\varphi)\zeta_M(f)(1 + |x|)^{-M+N} \tag{1.11}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que l'inégalité*

$$|\psi_j * f(x)| \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_{M+n+2}(\psi)\zeta_M(f)(1 + |x|)^{-M+N} \tag{1.12}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. *Preuve de* (i). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $N \in \mathbb{N}_0$. Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $y \to f(x-y)$ en x, on a

$$\begin{aligned} f(x-y) &= \sum_{|\beta|<N+1} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} f^{(\beta)}(x) \\ &\quad + (N+1) \sum_{|\beta|=N+1} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(\beta)}(x-ty)\, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.13}$$

En remplaçant cette formule dans $\varphi_j * f(x)$ et en tenant compte du fait que $0 \notin \operatorname{supp} \widehat{\varphi}$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \varphi(y) \mathrm{d}y = i^{|\beta|} \widehat{\varphi}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall \beta \in \mathbb{N}), \tag{1.14}$$

on obtient

$$\varphi_j * f(x) = (N+1) \sum_{|\beta|=N+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} (1-t)^N f^{(\beta)}(x-ty)\, \varphi_j(y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}t.$$

On continue en posant $z := 2^j y$, il vient

$$\begin{aligned} |\varphi_j * f(x)| &\leq c_1\, 2^{-jN} \sum_{|\beta|=N+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (1-t)^N |z|^{|\beta|} \left| f^{(\beta)}(x - 2^{-j}tz)\varphi(z) \right| \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z \\ &\leq c_2\, 2^{-jN} \zeta_{N+L}(f) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{N+1} (1 + |x - 2^{-j}tz|)^{-L} |\varphi(z)|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Nous allons utiliser maintenat l'inégalité suivate :

$$1+|x| \leq (1+|x-2^{-j}tz|)(1+|z|), \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0, \forall t \in [0,1], \tag{1.15}$$

il découle

$$|\varphi_j * f(x)| \;\leq\; c_1\, 2^{-jN}(1+|x|)^{-L}\zeta_{N+L}(f)\zeta_{N+L+n+2}(\varphi)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z\,.$$

On pose $M := N+L \in \mathbb{N}$ et comme

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z = \int_{|z|\leq 1} + \int_{|z|\geq 1} \ldots,$$

avec $\int_{|z|\leq 1}\ldots$ converge, car c'est une fonction continue sur un compact, et

$$\begin{aligned}\int_{|z|\geq 1}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z \;&=\; \int_{S^{n-1}}\mathrm{d}y'\int_1^\infty \frac{t^{n-1}t^{N+1}}{(1+t)^{N+n+2}}\mathrm{d}t \\ &\leq\; c\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \quad < +\infty,\end{aligned}$$

alors on aura

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c\, 2^{-jN}(1+|x|)^{-M+N}\zeta_M(f)\zeta_{M+n+2}(\varphi) \tag{1.16}$$

c'est le résultat.

Preuve de (ii). Ecrivons (1.13) avec ψ à la place de f. Nous avons maintenant, comme dans (1.14)

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-y)^\beta f(y)\mathrm{d}y = i^{|\beta|}\widehat{f}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall \beta \in \mathbb{N}), \tag{1.17}$$

alors comme aussi dans (1.15), i.e.,

$$1+|x| \leq (1+|x-ty|)(1+2^{-j}|y|), \qquad \forall j \leq 0,\, \forall t \in [0,1],$$

donc nous avons

$$\begin{aligned}|\psi_j * f(x)(x)| \;&\leq\; c_1 \sum_{|\beta|=N+1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y|^{|\beta|}}{\beta!}\Big|f(2^{-j}y)\psi^{(\beta)}(x-ty)\Big|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\leq\; c_2\, 2^{jN}\zeta_{N+L}(f)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{|\beta|}\left|\psi^{(\beta)}(x-ty)\right|(1+2^{-j}|y|)^{-L}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

on fait comme dans (i) on a

$$|\psi_j * f(x)(x)| \leq c\, 2^{jN}(1+|x|)^{-M+N}\zeta_M(f)\zeta_{M+n+2}(\psi)$$

c'est le résultat. ■

Dans ce théorème on peut se limter au cas où $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$. C'est le résutat suivant :

Corollaire 1.2 *La formule* (1.11) *est valable* $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$. *La formule* (1.12) *est valable* $\forall f \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'égalité (1.14) est satisfaite pour $|\beta| \leq N$ uniquement, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \varphi(y) \mathrm{d}y = i^{|\beta|} \widehat{\varphi}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall |\beta| \leq N).$$

De même pour (ii) du Théorème 1.3, c'est-à-dire dans (1.17) on a $i^{|\beta|} \widehat{f}^{(\beta)}(0) = 0$ $(\forall |\beta| \leq N)$. ■

Exemple 1.4 1- On prend $\varphi = \gamma$ et $\psi = \rho$ dans le Théorème 1.3.
2- Une application directe du Théorème 1.3 donne une inégalité intéressante : $\forall N \in \mathbb{N}$ il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que

$$|\gamma_j * f(x)| \leq c \min(2^{-jN}, 2^{jN}) \zeta_M(f)(1 + |x|)^{-M+N} \tag{1.18}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}$. On peut aussi se limiter à $f \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$ comme dans le Corolaire 1.2.

1.4.2 Opérateurs de convolution et $L_p(\mathbb{R}^n)$

Nous allons voir des estimations dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ où $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 1.4 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ ($M > N + n/p$) telle que l'inégalité*

$$\|\varphi_j * f\|_p \leq c\, 2^{-jN}\, \zeta_{M+n+2}(\varphi) \zeta_M(f) \tag{1.19}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ ($M > N + n/p$) telle que l'inégalité*

$$\|\psi_j * f\|_p \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_{M+n+2}(\psi) \zeta_M(f) \tag{1.20}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. *Preuve de* (i) et (ii). D'après le Théorème 1.3, il suffit de calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^{(M-N)p}} \mathrm{d}x = \int_{|x| \leq 1} + \int_{|x| \geq 1} \ldots,$$

avec $\int_{|x| \leq 1} \ldots$ converge, car c'est une fonction continue sur un compact, et

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{(1 + |x|)^{(M-N)p}} \mathrm{d}x &= \int_{S^{n-1}} \mathrm{d}x' \int_1^\infty \frac{t^{n-1}}{(1 + t)^{(M-N)p}} \mathrm{d}t \\ &\leq c \int_1^\infty t^{-(M-N)p+n-1} \mathrm{d}t \quad < +\infty, \end{aligned}$$

qui converge si $M > N + n/p$. ■ ■

Maintenant on considère les applications linéaires

$$T_j : f \to \varphi_j * f\,, \quad U_j : f \to \psi_j * f\,, \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

avec $\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 1.3 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|T_j f\|_p \leq c\, 2^{-jN} \zeta_M(f) \tag{1.21}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|U_j f\|_p \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_M(f) \tag{1.22}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. Application directe du Théorème 1.4. ∎

Corollaire 1.4 *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|T_j f\|_p + \|U_j f\|_p \leq c\, 2^{jN} \zeta_M(f) \tag{1.23}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. En applicant (ii) du Corollaire 1.3 on remarque que dans (1.22) on peut remplacer U_j par T_j puisuqe $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ∎

1.4.3 Partitions de l'unité

Il est claire que $\mathcal{F}^{-1}\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}^{-1}\gamma \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, voir l'Exercice 1.3.3. On cinsidère les applications linéaires

$$Q_j : f \to \gamma_j * f\,, \quad S_j : f \to \rho_j * f\,, \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

– avec $\gamma_j(x) := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j x)$ et $\rho_j(x) := \rho(2^{-j}x)$
– ou $\mathcal{F}\gamma_j(\xi) := \gamma(2^{-j}\xi)$ et $\mathcal{F}\rho_j(\xi) := \rho(2^{-j}\xi)$.
Un calcul simple donne

$$\sum_{j=-M}^{N} \gamma(2^{-j}\xi) = \rho(2^{-N}\xi) - \rho(2^{M+1}\xi) \qquad (\forall M, N \in \mathbb{Z}). \tag{1.24}$$

En faisant tendre N et M vers $+\infty$, et on remarque que

$$\lim_{M\to+\infty} \rho(2^{M+1}\xi) = 0 \qquad si \quad \xi \neq 0$$

$$\lim_{N\to+\infty} \rho(2^{-N}\xi) = \rho(0) = 1 \qquad si \quad \xi \neq 0,$$

il vient alors

Proposition 1.8 *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1\,, \tag{1.25}$$

partion de l'unité homogène