Espaces de type de Sobolev

Texte en cours de préparation

Madani Moussai

29 novembre 2020

Notations

- Si f est
- L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ e

Introduction

xxxxxxxxxxxxxxxx

Chapitre 1

Préliminaires

Séance

Programme (axes)

I. Définition et proprietés de quelques espaces fonctionnels "Besov et Lizorkin-Triebel".
II. Refaire I dans la cas homogène.
Remq. I et II d'après la décomposition de Littlewood-Paley -Forme discrète-
III. Voir I et II dans la cas continue.
IV. Réalisations
V. Application sur la composition.

TD Complément du cours sur l'analyse fonctionnelle.

1.1 xxxxxxx

Lemme 1.1. *$\exists (u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ telle que*

$$\int x^\beta u_\alpha(x) \mathrm{d}x = \delta_{\alpha\beta}.$$

lemme2 **Lemme 1.2.** *Il existe une partition C^∞ de la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, subordonnée par les ouverts $U_j = \{x : |x_j| > \frac{1}{\sqrt{2n}}\}$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j\Big(\frac{x}{|x|}\Big) = 1.$$

Lemme 1.3. *Comme dans le Lemme 1.2 on a*

$$\sum_{|\beta|=m} x^\beta \omega_\beta(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1.$$

1.2 Notations

– déf de ρ et γ.

– $\rho(\xi) + \sum_{k\geq 1} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0$, et
$\rho(2^{-j}\xi) + \sum_{k\geq j+1} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

– déf de S_j et Q_j.

1.3 Inégalités

inHo **Lemme 1.4. (Inégalité de Hölder)**
Soient $1 \le p, q \le \infty$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, *alors* $fg \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.3.1}$$ Hol-in01

inYoung **Lemme 1.5. (Inégalité de Young)**
Soient $1 \le p, q, r \le \infty$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, *avec* $r \ge p$ *et* $r \ge q$. *Alors pour tout* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *on a* $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.3.2}$$ Young03

Bernstein **Lemme 1.6. (Bernstein)**
Il existe une constante $c > 0$, *telle que*

$$\|f^{(\alpha)}\|_r \le c\, R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|f\|_p, \quad \forall p \le r,$$

où $R > 0$ *et* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le R\}$.

Preuve. XXXXXXXXXXXX □

• $\gamma_j := 2^{jn} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j \cdot)$, et $Q_j f = \gamma_j * f$, donc $\|Q_j f\|_p \le c\|f\|_p$ avec $1 \le p \le \infty$.
$\rho_j := 2^{jn} \mathcal{F}^{-1} \rho(2^j \cdot)$ et $S_j f = \rho_j * f$, donc $\|S_j f\|_p \le c\|f\|_p$ avec $1 \le p \le \infty$.

coroll-MM **Théorème 1.7.** $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\forall N \in \mathbb{N}_0$: $\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \le c\, 2^{-jN}$.

• Distributions tempérées modulo les polynômes

<u>Séance</u>

$\|Q_j f\|_p \le c\, 2^{-jN}$, $j \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
$\|Q_j f\|_p \le c\, 2^{jN}$, $j \in \mathbb{Z}^-, f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
$\|S_j f\|_p \le c\, 2^{jN}$, $j \in \mathbb{Z}^-, f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.8. • $Q_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$.
• $S_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.9. $Q_j f = 0$ si $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.10. • *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*), alors* $f = S_k f + \sum_{j>k} Q_j f$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*).*
• *Si* $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$*), alors* $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$ *dans* $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$*).*

Théorème 1.11. $Q_j Q_k = 0$ *si* $|j - k| \ge 2$.

lizoryam **Théorème 1.12. (Nikol'skij)**
$0 < a < b$, $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que*
• $\operatorname{supp} \widehat{u_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a2^j \le |\xi| \le b2^j\}$,
• $\|u_j\|_p \le c\, 2^{-jN}$, $j \in \mathbb{N}$.
Alors la série $\sum_{j \ge 0} u_j$ *converge dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve . Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u_j, \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u_j, \theta_j \varphi \rangle,$$

où $\theta_j * u_j = u_j$ $(\theta|_{a \le |\xi| \le b} = 1)$ et $\widehat{\theta_j} = \theta(2^{-j} \cdot)$, $\theta \ge 0$, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ radiale et $\theta|_{a \le |\xi| \le b} = 1$. □

Théorème 1.13. *Si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ et $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \operatorname{supp} \eta$. On pose $\theta_j(x) := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^j x)$ et $\eta_j(x) := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\eta(2^j x))$, alors*
- $\|\theta_j * f\|_p \le c\, 2^{-jN}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- $\|\theta_j * f\|_p + \|\eta_j * f\|_p \le c\, 2^{jN}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^-$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. $\operatorname{supp} \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \le |\xi| \le b\}, 0 < a < b$ et $0 \notin \operatorname{supp} \eta$, donc

$$\widehat{\theta_j}(\xi) = \theta(2^{-j}\xi) = \sum_{k \ge 0} \gamma(2^{-k}\xi)\theta(2^{-j}\xi) = \sum_{j+m_1 \le k \le j+m_2} \gamma(2^{-k}\xi)\theta(2^{-j}\xi),$$

ce qui donne

$$\|\theta_j * f\|_p = \sum_{m_1 \le k-j \le m_2} \|\theta_j * Q_k f\|_p \le \|\theta\|_1 \sum_{m_1 \le k-j \le m_2} \|Q_k f\|_p \le c\, 2^{-kN} \ldots.$$

□

Proposition 1.14. (admis)
Formule de Taylor
- $\|Q_j f\|_p \le c\, 2^{-jN}$, $j \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{S}$.
- $\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \le c\, 2^{jN}$, $j \in \mathbb{Z}^-, N \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{S}_\infty$.

prop03-p3 **Proposition 1.15.** *Si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ $\operatorname{supp} \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \le |\xi| \le b\}, 0 < a < b$, alors*

$$\theta(2^{-j}\xi) = \sum_{k=j+m_1}^{j+m_2} \theta(2^{-j}\xi)\gamma(2^{-k}\xi).$$

Preuve . Il suffit de faire l'intersection des supports ; un calcul facil !. □

prop-p3 **Proposition 1.16.** *Si u_j et $\operatorname{supp} \widehat{u_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le b2^j\}, b > 0$, alors $\exists m \in \mathbb{Z}$ dépend de b tel que $u_j = S_{j+m} u_j$.*

Preuve . En effet, $\rho(2^{-(k+m)}\xi)\widehat{u_j}(\xi) = \widehat{u_j}(\xi)$ si $|\xi| \le b2^j \le 2^{k+m}$, implique $b \le 2^m$ i.e., $m = [\log \frac{b}{2}] + 1$. □

Séance : vers l'espace de Besov -Inégalités Nikol'skij-

them.p.4 **Théorème 1.17. (Nikol'skij, partie convergence)**
$0 < a < b$, $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que
- $\operatorname{supp} \widehat{u_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a2^j \le |\xi| \le b2^j\}$,
- $A := (\sum_{j \in \mathbb{N}} (2^{js}\|u_j\|_p)^q)^{1/q} < +\infty$.

Alors la série $\sum_{j \ge 0} u_j$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta|_{a \le |\xi| \le b} = 1$, $\theta_j(x) := 2^{jn}\theta(2^j x)$, donc $\theta_j * u_j = u_j$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u_j, \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u_j, \theta_j * \varphi \rangle,$$

où $\theta \ge 0$, radiale donc par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u_j, \varphi \rangle \le \sum_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_p \|\theta_j * \varphi\|_{p'} \le c \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j(N+s)}\, 2^{js}\|u_j\|_p \le c\, A.$$

□

them02.p.4 **Théorème 1.18. (Nikol'skij, partie convergence)**
Si $s > 0$ dans le Théorème précédent, on peut se limiter au cas $a = 0$.

Preuve. Il suffit d'utiliser la Proposition 1.16 et faire la même démonstration que le Théorème précédent. □

Théorème 1.19. *Sous les hypothèse du Théorème 1.17 on a $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$. (on suppose bien sûr $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).*

Preuve. • $s > 0$: $\operatorname{supp} \widehat{u_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b2^j\}$,

$$\langle u_j, \varphi\rangle = \langle u_j, S_{j+m}\varphi\rangle,$$

et par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle u_j, \varphi\rangle \leq \|\varphi\|_{p'} \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js}2^{js}\|u_j\|_p + \sum_{j<0} 2^{jN-js}2^{js}\|u_j\|_p \leq c\,A, \quad (N-s>0).$$

• $s < 0$:

Lemme 1.20. $\operatorname{supp} \widehat{u_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \geq a2^j\} \Rightarrow \exists m' \in \mathbb{Z}$ *telle que* $S_{j+m'}u_j = 0$. *(Simple !)*

Alors

$$\langle u_j, \varphi\rangle = \langle u_j, \varphi - S_{j+m'}\varphi\rangle,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle u_j, \varphi\rangle &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\varphi - S_{j+m'}\varphi\|_{p'}\|u_j\|_p + \sum_{j<0} 2^{j(N-s)}2^{js}\|u_j\|_p, \quad (N-s>0),\\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j(N-s)}2^{js}\|u_j\|_p,\end{aligned}$$

avec

$$\|\varphi - S_{j+m'}\varphi\|_{p'} \leq \sum_{k\geq j+m'} \|Q_k\varphi\|_{p'} \leq c\,2^{N(j+m')}$$

• $s = 0$: $\langle u_j, \varphi\rangle = \sum_{k=j+m_1}^{j+m_2} \langle u_j, Q_k\varphi\rangle$. Donc par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle u_j, \varphi\rangle &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|u_j\|_p \sum_{k=j+m_1}^{j+m_2} \|Q_j\varphi\|_{p'}\\ &\leq \sum_{j\geq 0} \|u_j\|_p \sum_{k<j+m_2} 2^{jN} + \sum_{j<0} \|u_j\|_p \sum_{k>j+m_1} 2^{-jN}.\end{aligned}$$

□

Remarque 1.21. En changeant u_j par $Q_j f$ dans A du Théorème 1.17, on est prodre de la définition de l'espace de Besov.

1.4 Exercices

1. Démontrer que
- $\partial_j(\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $\quad m = 0,1,2,3,\ldots$, et $j = 0,1,2,\ldots,n$.
- $\partial_j(\mathcal{S}'_{m+1}(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow \mathcal{S}'_{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $\quad m = 0,1,2,3,\ldots$, et $j = 0,1,2,\ldots,n$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$.

2.
(i) Soit l'opérateur de Riesz défini par

$$\mathcal{I}_s f = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f \quad \text{i.e.} \quad \widehat{\mathcal{I}_s f}(\xi) := c|\xi|^{-s}\widehat{f}(\xi),$$

o˘ $s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que
- $\mathcal{I}_s : \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\langle \mathcal{I}_s f, g\rangle = \langle f, \mathcal{I}_s g\rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

On définit alors $\mathcal{I}_s : \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle \mathcal{I}_s f, g\rangle := \langle f, \mathcal{I}_s g\rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

- $\mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_{s'} = \mathcal{I}_{s+s'}$.

(ii) Même exercice avec $\mathcal{J}_s f := (1-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f$.

3.
(i) Pour tout g on pose $g_t(x) := \frac{1}{t^n} g\left(\frac{x}{t}\right)$, $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.
- Démontrer que $f * \theta_t = \left(\theta * f_{\frac{1}{t}}\right)_t$.
- Démontrer que $f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) * \psi_t = \left(f * \psi_{\frac{t}{\lambda}}\right)\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$, $\lambda, t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\widehat{R_j f}(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi), \forall j = 1,\ldots,n$.
- Calculer $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_j}{|\xi|}\right) = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$.
- Ecrire $R_j f(x) = \mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}^n} \ldots \mathrm{d}x$.

4. Dans quel espace E, la fonction g définie par

$$\widehat{g}(\xi) = \xi^m \rho(\xi);$$

(ρ du cours) appartiennent-elle ?.
Généraliser, en changement ρ par une autre fonction.

5. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que supp $\widehat{f} \subseteq K$ (K est une compact de $\mathbb{R}^n$). Etudier $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.
Même question avec $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ et K un compact de $\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Chapitre 2

Espaces de Besov

Séance : espace de Besov

2.1 Définitions et premiéres propriétés

Preparation

DÈfinition 2.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. On définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \|S_0 f\|_p + \big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Il est claire que si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q \leq c\,\zeta_m(f)\sum_{j\geq 1} 2^{j(s-N)q},$$

avec $N \in \mathbb{N}$ quelconque, d'où la convergence géométriquement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est déjà vu.
Pour $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\varphi = S_0\varphi + \sum_{j\geq 1} Q_j\varphi.$$

Soit $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\gamma}\gamma = \gamma$ et on définit $\widetilde{Q}_j : \widetilde{Q}_j Q_j = Q_j$, par l'inégalité de Hölder

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \big|\sum_{j\geq 1}\langle Q_j f, \widetilde{Q}_j\varphi\rangle\big| \leq c\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\, 2^{-jN} \leq c_1\,\|f\|_{B^s_{p,q}}.$$

□

Proposition 2.3. $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Voir Triebel ou Peetre. □

Proposition 2.4. *Si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial f \in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, et*

$$\|\partial f\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leq c\,\|f\|_{B^s_{p,q}}.$$

Preuve. Comme $\|Q_j(\partial f)\|_p \leq c\,2^j\|Q_j f\|_p$ on a le résultat. □

Proposition 2.5. (Inclusions)
(i) $B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\forall q_1 \leq q_2$.
(ii) $B^{s_1}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si* $s_1 > s_2$, *en particulier* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s+\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varepsilon > 0$.
(iii) $B^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$ *si* $p_2 > p_1$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2}$, *en particulier* $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. *Preuve de* (iii).

$$2^{js_2}\|Q_jf\|_{p_2} \leq c2^{j(s_2-s_1+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2})}2^{js_1}\|Q_jf\|_{p_1} \leq c\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}}\, 2^{j(s_2-\frac{n}{p_2}+\frac{n}{p_1}-s_1)},$$

comme $s_2 - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} - s_1 < 0$ on a le résultat.
(i)–(ii) sont faciles. □

Proposition 2.6. $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n)$ *si* $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *et* $r > p$, *ou* $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *et* $q = 1$.

Preuve. Comme $L_r(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a : $\forall f \in L_r(\mathbb{R}^n)$

$$f = S_0 f + \sum_{j\geq 1} Q_j f,$$

$$\begin{cases} \|Q_jf\|_r \leq c2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)}\, 2^{js}\|Q_jf\|_p \\ \text{ et } \quad \|S_0f\|_r \leq c\|S_0f\|_p. \end{cases}$$

Si $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s < 0$ alors $\sum_{j\geq 1} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)} < +\infty$.
Si $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s = 0$ alors $\sum_{j\geq 1}\|Q_jf\|_r \leq c\sum_{j\geq 1} 2^{js}\|Q_jf\|_p$. □

Séance : exemples de fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

2.2 Exemples de fonctions dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

examp01 **Exemple 1.** *La mesure de Dirac* $f(x) = \delta$. *On sait que* $\widehat{\delta} = 1$ *d'où*

$$\widehat{Q_jf}(\xi) = \gamma(2^{-j}\xi) \quad \text{i.e.} \quad Q_jf(x) = 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^jx),$$

ce qui implique

$$\|Q_jf\|_p = 2^{j\frac{n}{p'}}\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\|_p \qquad \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p},$$

i.e. $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $s < -\frac{n}{p'}$ *ou* $s = -\frac{n}{p'}$ *et* $q = \infty$.
En particulier, si $p = \infty$ *(i.e.* $p' = 1$*) on a* $\delta \in B^{-n}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *l'espace de Hölder !.*

examp02 **Exemple 2.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\widehat{Q_jf}(\xi) = 2^{-jt}|2^{-j}\xi|^{-t}\gamma(2^j\xi) = 2^{-jt}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi),$$

on pose $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\widehat{\psi}(\xi) = |\xi|^{-t}\gamma(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *ce qui donne* $Q_jf(x) = 2^{-jt}2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\psi(2^jx)$ *et*

$$\|Q_jf\|_p = 2^{-jt+j\frac{n}{p'}}\|\mathcal{F}^{-1}\psi\|_p,$$

d'où $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $s < t - \frac{n}{p'}$ *ou* $s = t - \frac{n}{p'}$ *et* $q = 1$.

examp03 **Exemple 3.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-t}(\log|\xi|)^{-r}$. *"Indication, voir la série de Bourdaud".*

examp04 **Exemple 4.** *Dans* $\mathrm{pv}\frac{1}{x} \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

$$\mathcal{F}(x\mathrm{pv}\frac{1}{x})(\xi) = \mathcal{F}(1) = \delta,$$

d'où

$$\delta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}(\mathrm{pv}\frac{1}{x})(\xi) = H'(\xi),$$

i.e.

$$\mathcal{F}(\mathrm{pv}\frac{1}{x})(\xi) = -H(\xi) + c,$$

or

$$\mathcal{F}(\mathrm{pv}\frac{1}{x})(-\xi) = -\mathcal{F}(\mathrm{pv}\frac{1}{x}) = -H(-\xi) + c,$$

i.e. $2c = H(\xi) + H(-\xi) = 1$ *(i.e.* $c = \frac{1}{2}$*)*

$$\mathcal{F}(\mathrm{pv}\frac{1}{x})(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \xi > 0, \\ \frac{1}{2} & \xi < 0, \\ 0 & \xi = 0. \end{cases}$$

2.3 Normes équivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Soit $\mathcal{J}_\alpha = (I - \Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ l'opérateur de Riesz non homogène i.e.

$$\widehat{\mathcal{J}_\alpha f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}(\xi).$$

Théorème 2.7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}$ *on a* $\mathcal{J}_\alpha : B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to B^{s-\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un isomorphisme et*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \sim \|\mathcal{J}_\alpha f\|_{B^{s-\alpha}_{p,q}}.$$

Preuve. Voir Triebel 1983 p.58. □

Théorème 2.8. $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall s \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{B^{s-m}_{p,q}} \quad et \quad \|f\|_{B^{s-m}_{p,q}} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{B^{s-m}_{p,q}}$$

sont des normes équivalentes ‡ $\|f\|_{B^s_{p,q}}$.

Preuve. Voir Triebel 1983 p.58. □

2.4 Operateurs maximaux

On définit $Q^{*,a}_j$ par :

$$Q^{*,a}_j(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x-y)|}{1 + |2^j y|^a}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^+_*.$$

Théorème 2.9. *Si* $a > \frac{n}{p}$ *alors on peut remplaces* $Q_j f$ *par* $Q^{*,a}_j f$ *dans la définition de* $\|f\|_{B^s_{p,q}}$ *et on obtient une norme équivalente.*

Preuve. Voir Triebel 1983 pp.53–54. □

Séance

2.5 Autres propriétés

Proposition 2.10. *L'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ne dépend pas du choix de la fonctions ρ, c-à-d si on considère $\widetilde{\rho}$ une autre Cut-off fonction alors*

$$\|f\|^{(\rho)} \sim \|f\|^{(\widetilde{\rho})},$$

où

$$\|f\|^{(\rho)} = \|S_0 f\|_p + \Big(\sum_{j\geq 1}(2^{js}\|Q_j f\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.15. □

Proposition 2.11. *Si $s > 0$ alors $\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{B^{s-1}_{p,q}}$ est une norme équivalente.*

Preuve. (Le cas $n = 1$ suffira).
Comme $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ $(s > 0)$ et $\|f'\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leq c\|f\|_{B^s_{p,q}}$ on a alors l'inclusion dans un sens.
Soit la fonction $\widetilde{\gamma}(\xi) = \frac{1}{\xi}\gamma(\xi)$ qui appartient ‡ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{f}'(\xi)$ permet de définir $Q_j f$ comme suit :

$$Q_j f = \frac{1}{\mathrm{i}}\widetilde{Q}_j f' \quad \text{o˘} \quad \widehat{\widetilde{Q}_j f}(\xi) = \widetilde{\gamma}(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Nous avons

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq c\|f\|_p + \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{j(s-1)q}\|\widetilde{Q}_j f'\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq c''\|f\|_p + \|f'\|_{B^{s-1}_{p,q}},$$

ici on a appliqué l'inégalité de Young pour le terme $\|S_0 f\|_p$. □

Proposition 2.12. (Nikol'skij)
Soit $a, b, (u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ comme le Théorème 1.17. Alors

$$\|\sum_j u_j\|_{B^s_{p,q}} \leq c\, A.$$

(Même conclusion avec la hypothèses du Théorème 1.18)

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.15. □

Proposition 2.13. (Gagliardo-Nirenberg)
Soient $0 < \theta < 1, 1 \leq p, q \leq +\infty$ et $s \in \mathbb{R}$ alors

$$\|f\|_{B^{\theta s}_{\frac{p}{\theta},\frac{q}{\theta}}} \leq c\|f\|^{\theta}_{B^s_{p,q}}\|f\|^{1-\theta}_{B^0_{\infty,\infty}}.$$

Preuve. Nous rappolons qu'on a

$$\|f\|_{\frac{p}{\theta}} \leq \|f\|_p^{\theta}\|f\|_{\infty}^{1-\theta} : L_p \cap L_\infty \subset L_{\frac{p}{\theta}}.$$

Nous avons :

$$\|Q_j f\|^{\frac{p}{\theta}}_{\frac{p}{\theta}} = \int_{\mathbb{R}^n} |Q_j f|^p |Q_j f|^{\frac{p}{\theta}-p} \leq \|Q_j f\|_p^p \|Q_j f\|_\infty^{\frac{p}{\theta}-p}.$$

Ce qui donne

$$\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|^{\frac{q}{\theta}}_{\frac{p}{\theta}}\Big)^{\frac{\theta}{q}} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}^*}\|Q_k f\|_\infty^{1-\theta}\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}.$$

Comme

$$\|S_0 f\|_{\frac{p}{\theta}} \leq \|S_0 f\|_p^{\theta} \|S_0 f\|_{\infty}^{1-\theta}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^{\theta s}_{\frac{p}{\theta},\frac{q}{\theta}}} &\leq \Big(\|S_0 f\|_p + \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big)^{\theta} \Big(\|S_0 f\|_{\infty} + \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \|Q_k f\|_{\infty}\Big)^{1-\theta} \\ &= \|f\|^{\theta}_{B^s_{p,q}} \|f\|^{1-\theta}_{B^0_{\infty,\infty}}.\end{aligned}$$

□

Examen rapide "teste"

Soit $\mathcal{J}_s = (I-\Delta)^{-\frac{s}{2}},\ s \in \mathbb{R}$.
- Écrire $\widehat{\mathcal{J}_s f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$.
- Pour quelle valeurs de s on a $\mathcal{J}_s : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Justifier que $\mathcal{J}_s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et définir $\mathcal{J}_s$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- Démonter que $\mathcal{J}_s : B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to B^{s+\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

2.6 Exercices

Espaces de Besov- voir les notations du cours-

6. On définit $B^s_{p,q}$ par

$$\|f\|^{\gamma}_{B^s_{p,q}} := \|S_f\|_p + \big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\big)^{1/q}.$$

Démontrer que $\|\cdot\|^{\gamma}_{B^s_{p,q}}$ est équivalente ‡ $\|\cdot\|^{\widetilde{\gamma}}_{B^s_{p,q}}$ si $\widetilde{\gamma}$ est de même nature que γ.

7. Appliquer le théorème de Nikol'skij à la suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $(Q_j f)_{j\in\mathbb{N}}$.

8. Gagliardo-Nirenberg : soient $0 < \theta < 1, p, q \in [1, +\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$. Démontrer que
(i) $L_{\infty} \cap L_p \subset L_{\frac{p}{\theta}}$ i.e. $\|f\|_{\frac{p}{\theta}} \leq \|f\|_p^{\theta}\|f\|_{\infty}^{1-\theta}$.
(ii) $B^s_{p,q} \cap B^0_{\infty,\infty} \subset B^{\theta s}_{\frac{p}{\theta},\frac{q}{\theta}}$ i.e. $\|f\|_{B^{\theta s}_{\frac{p}{\theta},\frac{q}{\theta}}} \leq c\|f\|^{\theta}_{B^s_{p,q}}\|f\|^{1-\theta}_{B^0_{\infty,\infty}}$.

Chapitre 3

Les espaces de Besov homogènes

<u>**Séance-Les espaces de Besov homogènes-**</u>

3.1 Définitions et quelques propriétés

Preparation02

DÈfinition 3.1. *$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\big)^{1/q} < +\infty.$$

• Il est claire que $\|f+\mathcal{P}\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$, $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Aussi, $(\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (quasi-Banach si p ou $q < 1$).
• $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ est une semi-norme car $\|\mathcal{P}\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.2. *L'espace $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ne dépend pas du choix de la fonctions ρ, c-à-d si on choisit $\widetilde{\rho}$ une autre Cut-off fonction on a*

$$\|f\|^{(\rho)}_{\dot{B}^s_{p,q}} \sim \|f\|^{(\widetilde{\rho})}_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Preuve. Voir [Triebel-1983], ou [Peetre-1976]. □

sobolembed **Proposition 3.3.** (i) $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)$, *si* $q \le q_1$.
(ii) $\dot{B}^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$ *si* $p_1 < p_2$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$.

Preuve. (i) résulte de $\ell_q \hookrightarrow \ell_{q_1}$.
(ii) Il suffit de l'application de l'inégalité de Bernstein, c-à-d

$$\|Q_j f\|_{p_2} \le c\, 2^{j(\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2})}\|Q_j f\|_{p_1}.$$

□

besovcomplet **Proposition 3.4.** *Il existe c_1 et c_2 tel que*

$$c_1\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \le \lambda^{s-\frac{n}{p}}\|f(\lambda^{-1}(\cdot))\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \le c_2\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}},$$

$\forall f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall \lambda > 0$.

Pour démontrer la Proposition 3.4 nous avons besoin de l'assertion suivante :
• $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ et

$$\int_0^\infty \widehat{\psi}(t\xi)\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1, \quad \forall \xi \neq 0.$$

• On pose $\psi_t = \frac{1}{t^n}\psi(\frac{1}{t}\cdot)$.

Lemme 3.5. *L'espace $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ admet une norme équivalente définit par l'expression :*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \Big(\int_0^\infty t^{-sq}\|\psi_t * f\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. On pose

$$u := \int_0^\infty \psi_t * f\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

alors, il suffit d'utiliser la formule suivante :

$$Q_j u(x) = \int_{a'2^{-j}}^{b'2^{-j}} Q_j(\psi_t * f)(x)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

où$b' > a' > 0$ sont défini tels que

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a' \leq |\xi| \leq b'\}.$$

□

Preuve de la Proposition 3.4. Il suffit d'appliquer la formule suivante

$$f\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big) * \psi_t = \big(f * \psi_{\frac{t}{\lambda}}\big)\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big), \quad \forall \lambda > 0,$$

pour obtenir l'équivalence des normes considérees. □

Remarque 3.6. *De la Proposition 3.4, il découle qu'on peut rénomée l'espace $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\|f\|^{(1)}_{\dot{B}^s_{p,q}} = \lambda^{s-\frac{n}{p}}\big\|f\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big)\big\|_{\dot{B}^s_{p,q}}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Proposition 3.7. *$f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ssi $\partial_k f \in \dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, de plus*

$$\sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}}$$

est une norme équivalente.

Preuve. Il suffit de changer Q_j par $\widetilde{Q}_{j,k}$ définit par

$$\gamma_k(\xi) = \mathrm{i}\xi_k\gamma(\xi), \quad k = 1, \dots, n,$$

et le fait que $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ ne dépend pas du choix de la fonction γ. □

3.2 Relation avec l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

thm01-rela **Théorème 3.8.** *Soient $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. Alors $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ssi $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $[f]_\infty \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. De plus,*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \sim \|f\|_p + \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

Preuve. • Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ telle que $[f]_\infty \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $\|S_0 f\|_p \leq c\|f\|_p$, et

$$\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^s_{p,q}},$$

donc $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

• Si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &\leq \sum_{j\geq 1} 2^{-js}(2^{js}\|Q_j f\|_p) + \|S_0 f\|_p \\
&\leq \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{-jsq'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} + \|S_0 f\|_p \\
&\leq c_1\|f\|_{B^s_{p,q}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^-} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c_1\|f\|_p + \|f\|_{B^s_{p,q}} \\
&\leq c_2\|f\|_{B^s_{p,q}} + \|f\|_{B^s_{p,q}},
\end{aligned}$$

(d'après le cas précédent). □

Séance- Relation avec l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$-

3.3 Relation entre $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 3.9. *(recopie le Théorème 3.8).*

Le cas de l'espace de Hölder

Proposition 3.10. *Soient $S > 0$ alors $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec $\dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Nous rappelons que $\|f\|_{B^s_{\infty,\infty}} := \|S_0 f\|_\infty + \big(\sup_{j\geq 1} 2^{jsq}\|Q_j f\|_\infty\big)$. Alors si $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, nous disons $f(x) = x^\alpha$

$$\begin{aligned}
S_0 f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \check{\rho}(y) f(x-y)\mathrm{d}y = \sum_{\beta<\alpha}(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}\int_{\mathbb{R}^n}\check{\rho}(y)y^\beta \mathrm{d}y \\
&= \sum_{\beta<\alpha}(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}\rho(0)^{(\beta)} = 0,
\end{aligned}$$

donc $f \in B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$. □

3.4 Rappel sur les distributions modulo les polynômes

$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) = \{c\}$, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) = \{ax+b\}$,..., $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\text{tout poly}\}$.
On pose

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \widehat{f}^{(\alpha)}(0) = 0;\ \forall |\alpha| < m\} = \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)^\perp,$$

et on obtient les espaces duals :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) & = & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'_{m+1}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n) & = & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\langle 0, f\rangle = 0,\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
On introduit l'entier ν définir par :

$$\nu := \begin{cases} \left([s - \frac{n}{p}] + 1\right)_+ & \text{si } s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \text{ ou } q > 1, \\ s - \frac{n}{p} & \text{si } s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \text{ et } q = 1. \end{cases} \tag{3.4.1}$$ 5vv8

Remarque 3.11. l'entier $\nu \in \mathbb{N}$ convre tout les cas suivant le quatres paramétes $m = 1, 2, \ldots,$ $s \in \mathbb{R}$ et $1 \le q, q \le \infty$. Il a été découvert par G. Bourdaud en 1995 (voir [Bourd-1995 RMI])

Théorème 3.12. *Si $\nu \ge 1$, alors il existe $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ telle que la série $\sum_{j\le 0} Q_j f$ diverge dans $\mathcal{S}'_{\nu-1}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. L'idée de la démonstration est de construire une fonction $\varphi \in \mathcal{S}_{\nu-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\sum_{j\le 0} |\langle Q_j f, \varphi\rangle| = \infty.$$

Nous rappelons la caractérisation suivante :
• <u>Dans</u> $\mathbb{R}$: si $g \in \mathcal{S}$ alors $g' \in \mathcal{S}_1$, $g'' \in \mathcal{S}_2$, $g''' \in \mathcal{S}_3$,..., $g^{(\nu-1)} \in \mathcal{S}_{\nu-1}$.
En effet, posons $\varphi = g^{(\nu-1)}$ alors

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \xi^{\nu-1} g'(\xi),$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}\widehat{\varphi}(\xi)|_{\xi=0} &= \sum_{m'\le m} \binom{m}{m'} \left(\xi^{\nu-1}\right)^{(m')} g^{(m-m')}(\xi)|_{\xi=0} \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad m' < \nu - 1. \end{aligned}$$

Soient $\gamma_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive, radiale telle que

$$\operatorname{supp}\gamma_1 \subseteq \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} \le |\xi| \le 2,\ \xi_1 \ge 0\right\}.$$

On pose $g_1 \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\widehat{g_1} = \gamma\gamma_1.$$

Il est clair que $\gamma|_{\operatorname{supp}\gamma_1} = 1$ (i.e. $\widehat{g_1} = \gamma_1$).
On pose $m := \nu - 1 \in \mathbb{N}$ et on choisit une suite positive $(a_j)_j$ telle que

$$(A_1) \qquad \Big(\sum_{j\ge 0} (2^{-j(s-\frac{n}{p})} a_j)^q\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

$$(A_2) \qquad \sum_{j\ge 0} 2^{-jm} a_j = +\infty.$$

On choisit $(a_j)_j$ da la faÁon suivante :
• $s-\frac{n}{p}\notin\mathbb{N}$ ou $(s-\frac{n}{p}\in\mathbb{N}^*$ et $q=1)$, $a_j:=2^{jr}$ avec $m<r<s-\frac{n}{p}$.
• $s-\frac{n}{p}\in\mathbb{N}$ et $q>1$, $a_j:=\frac{2^{jm}}{(1+j)^{1-r}}$ avec $0<r<1-\frac{1}{q}$.
La condition (A_1) implique que

$$(A_3)\qquad \sum_{j\geq 0}2^{-j(m+1)}a_j<+\infty.$$

Soit la fonction

$$f(x):=\sum_{j\geq 0}a_jg(2^{-j}x);\quad (g=\mathcal{F}^{-1}\gamma_1).$$

On a alors

$$Q_{-j}f(x)=a_jg_1(2^{-j}x)\quad \forall j\geq 0.$$

Soit $\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\theta}(x)\mathrm{d}x=1$. On a $\partial_1^m\theta\in\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\begin{aligned}\langle f,\partial_1^m\theta\rangle &= (-1)^m\sum_{j\geq 0}a_j2^{-jm}\langle\partial_1^m g(2^{-j}\cdot),\theta\rangle\\ &= (-1)^m\sum_{j\geq 0}a_j2^{-jm}\int_{\mathbb{R}^n}\big(\partial_1^m g(2^{-j}x)-\partial_1^m g(0)\big)\overline{\theta}(x)\mathrm{d}x+(-1)^m\sum_{j\geq 0}a_j2^{-jm}\partial_1^m g(0).\end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{j\geq 0}a_j2^{-jm}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\big(\partial_1^m g(2^{-j}x)-\partial_1^m g(0)\big)\overline{\theta}(x)\mathrm{d}x\Big|\leq c\|\nabla\partial_1^m g\|_\infty\sum_{j\geq 0}a_j2^{-j(m+1)}<+\infty,$$

et comme $\partial_1^m g(0)\neq 0$ alors $\langle f,\partial_1^m\theta\rangle=+\infty$, d'aprËs la condition (A_2).
Le cas $q=+\infty$ se traite de la même façon en utilisant les fonctions puissances, voir [Bour-2009], "Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov, Paris 2009". □

Chapitre 4

Les réalisations

<u>Séance : Les réalisations</u>

4.1 Distributions nulles à l'infini

Dis-nulles

def4C0 **DÈfinition 4.1.** *On dit qu'une distribution tempérée* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *tend vers* 0 *‡ l'infini si on a* $\lim_{\lambda \to 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*. L'ensemble de telles distributions est noté* $\widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$*.*

Exemple 5.

Bibliographie

...\...