Estimations de type de Nikol'skij

1.6 Inégalités classiques

Nous rappelons les inégalités dans les $L_p(\mathbb{R}^n)$ connues et nous émitons les preuves sauf la troisième estimations.

Lemme 1.1 (Inégalité de Hölder) *Soient* $1 \leq p, q \leq \infty$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *, alors* $fg \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.35}$$

Lemme 1.2 (Inégalité de Young) *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, *avec* $r \geq p$ *et* $r \geq q$. *Alors pour tout* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *on a* $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.36}$$

Lemme 1.3 (Inégalité de Bernstein) *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Il existe une constante* $c = c(n, p, q, \alpha) > 0$ *telle que*

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c\, R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p \tag{1.37}$$

pour tout $R > 0$ *et toute* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *vérifiante* $\operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq \Omega_R := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$.

Preuve. Considérons une fonction test θ telle que $\theta_{|\Omega_1} = 1$. Il vient que la fonction θ_R définie par $\widehat{\theta}_R := \theta(\cdot/R)$ satisfait $\widehat{\theta}_R \widehat{f} = \widehat{f}$, c-à-d $\theta_R * f^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$. Maintenant comme $\theta_R * f^{(\alpha)} = \theta_R^{(\alpha)} * f$, il suffit d'appliquer l'inégalité de Young en calculant $\|\theta_R^{(\alpha)}\|_r$ avec $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + 1$. ■

Remarque 1.4 Le Lemme 1.3 est satisfait pour tout Let $0 < p \leq q \leq \infty$, voir [44, p. 18]. Quant-à la constante $c > 0$ dans la formule (1.37) avec $\alpha = 0$, c-à-d

$$\|f\|_q \leq c\, R^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p$$

est donnée explicitement dans [35, Théorème. 4], dans cet article sa valeur est $c = p_0^{n(1/p - 1/q)}$ où p_0 est le petit entier plus grand que $p/2$, c-à-d $p_0 = 1 + [p/2]$.

1.7 Les opérateurs Q_j et S_j

Dans la Section 1.4.3 en particulier la formule (1.24), nous avons définis les opérateurs Q_j et S_j ainsi on a donné quelques propriétés. Nous rappelons ici que $Q_j(f) = \gamma_j * f$ (avec $\gamma_j := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j\cdot)$) et que $S_j(f) = \rho_j * f$ (avec $\rho_j := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\rho(2^j\cdot)$) pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.5 *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. $Q_j f = 0$ *si et seulement si* $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $Q_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. $S_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. 1– On a vu dans l'Exercice 1.3.5 que $\widehat{x^\alpha} = i^{|\alpha|}(2\pi)^n\delta^{(\alpha)}$. Comme $0 \notin \operatorname{supp}\gamma$ il vient alors que $\gamma^{(\alpha)}\delta^{(\beta)} = 0$ pour tout α et tout β. Anisi $Q_j(x^\alpha) = 0$.

2– Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\gamma_j * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ puisque $\gamma_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus $\partial^\alpha(\widehat{\gamma}_j\widehat{f})(0) = 0$ puisque $\partial^\beta\widehat{\gamma}(0) = 0$ (n'oublions pas que $\widehat{\gamma}_j(\xi) = \gamma(2^{-j}\xi)$. Donc la fonction $\gamma_j * f$ appartient à $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
Soit maintenant $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\gamma$ est une fonction réelle et paire, alors

$$\langle Q_j f, g\rangle = \langle f, Q_j g\rangle. \tag{1.38}$$

D'après ce que précède on a $Q_j g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, donc

$$|\langle Q_j f, g\rangle| < \infty,$$

ce qui montre que $Q_j f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$.

3– La preuve est similaire au point précédent. ■

Pour une fonction f, en multipliant "formelement" les partitions (1.26) et (1.27) par $\widehat{f}$ et en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$, il vient

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j f\,, \tag{1.39}$$

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f\,. \tag{1.40}$$

Théorème 1.8 *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

1. *Si* $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *la série* (1.39) *coverge.*
2. *Si* $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *la série* (1.39) *coverge dans* $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$
3. *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *la série* (1.40) *coverge.*
4. *Si* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *la série* (1.40) *coverge dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Preuve. 1– D'après le Théorème 1.5 et la Reamrk 1.6 on a $\|Q_j f\|_p \leq c \min(2^{jN}, 2^{-jN})$ si $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ce implique

$$|f(x)| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|Q_j f\|_\infty \leq c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \min(2^{jN}, 2^{-jN}) < \infty$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2– Soient $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. D'après le point pécédent on a $g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j g$. D'où on obtient

$$\langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j f, g\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle f, Q_j g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

3– On peut raisonner comme dans le point 1.
4– On peut raisonner comme dans le point 2. ■

Proposition 1.12 *Pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$ on a $Q_j Q_k = 0$ si $|j-k| \geq 2$.*

Preuve. Il suffit d'étudier l'intersection suivante :

$$\left\{\xi : \frac{1}{2}2^j \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^j\right\} \cap \left\{\xi : \frac{1}{2}2^k \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^k\right\} = \emptyset$$

qui résulte pour $|j-k| \geq 2$. ■

Plus généralement on a l'assertion suivante, qui sera utile dans la preuve des estimations de type de Nikol'skij :

Proposition 1.13 *Si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ avec $\operatorname{supp}\theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \leq |\xi| \leq b\}$ où $0 < a < b$, alors il existe deux entiers m_1 et m_2 tel que*

$$\theta(2^{-j}\xi) = \sum_{k=j+m_1}^{j+m_2} \theta(2^{-j}\xi)\gamma(2^{-k}\xi).$$

Preuve. On fait l'intersection des supports comme dans la Proposition 1.12. Nous avons

$$\left\{\xi : 2^j a \leq |\xi| \leq 2^j b\right\} \cap \left\{\xi : \frac{1}{2}2^k \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^k\right\} = \emptyset,$$

alors $2^j b \leq \frac{1}{2}2^k$ implique $\log_2(2b) \leq k-j$, ausi $2^j a \geq \frac{3}{2}2^k$ implique $\log_2(2a/3) \geq k-j$. On obtient donc m_1 et m_2 sont les entiers prochent de $\log_2(2a/3)$ et $\log_2(2b)$. ■

mmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm

mmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm