Corrigé type "Série n°01" Algèbre I

Exo1

① $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\Rightarrow Q$	$\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$	$\Leftrightarrow$
1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

② $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \left((\overline{P\wedge\overline{Q}}) \wedge (\overline{Q\wedge\overline{P}})\right)$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\Leftrightarrow Q$	$P\wedge\overline{Q}$	$\overline{P\wedge\overline{Q}}$	$Q\wedge\overline{P}$	$\overline{Q\wedge\overline{P}}$	$(\overline{P\wedge\overline{Q}})\wedge(\overline{Q\wedge\overline{P}})$	$\Leftrightarrow$
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1

③ $\left(P \wedge (\overline{Q\wedge R})\right) \Leftrightarrow \left((P\wedge\overline{Q}) \vee (P\wedge\overline{R})\right)$

1ère méthode : $\left(P \wedge (\overline{Q\wedge R})\right) \Leftrightarrow \left(P\wedge(\overline{Q}\vee\overline{R})\right)$ (la négation de $\wedge$)

$\Leftrightarrow \left((P\wedge\overline{Q}) \vee (P\wedge\overline{R})\right)$ (la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$)

2ème méthode : table de vérité.

Exo2

① $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c$, ou plus simplement $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0)$.

② $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x$.

③ $\exists ! x \in \mathbb{R} \mid \sin x = x$.

④ $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \mid m > n$.

Exo3

① $\overline{0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25 \wedge \overline{\sqrt{x} \leq 5} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25 \wedge \sqrt{x} > 5.$

② $\overline{0 < x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq y < 3} \Leftrightarrow \overline{0 < x \leq 1} \text{ et } \overline{2 \leq y < 3}$

$\Leftrightarrow \overline{0 < x \text{ et } x \leq 1} \text{ et } \overline{2 \leq y \text{ et } y < 3}$

$\Leftrightarrow (0 \geq x \text{ ou } x > 1) \text{ et } (2 > y \text{ ou } y \geq 3).$

③ $\overline{\exists x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0 \text{ et } \exists x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0}.$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0.$

④ $\overline{\forall \varepsilon > 0 ; \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in D_f ; (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)}.$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall \alpha > 0 : \exists x \in D_f \mid (|x - x_0| < \alpha \wedge |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$

Exo4

(a) est fausse. Car sa négation $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y \leq 0$ est vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$, donc $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$

(b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre par exemple $y = -x + 1$
Donc, $x + y = 1 > 0$

(c) est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$.

(d) est vraie, on peut prendre $x = -1$.

Exo5

①

$|x| < 0.1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 0.01.$

$|2x^2 - x| \leq 2x^2 + |x| < 2 \times 0{,}01 + 0.1 = 0.12.$

② On considère deux cas possibles :

1^{er} cas : Si n est pair, alors $n = 2k$

$n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 + 3n = 4k^2 + 6k = 2(2k^2 + 3k) = 2k'$

Donc, $n^2 + 3n$ est pair.

$2^{ème}$ Cas: Si n est impair, alors $n = 2k+1$

$n^2 + 3n = (2k+1)^2 + 3(2k+1) = 4k^2 + 10k + 4 = 2(2k^2 + 5k + 2) = 2k^\circ$

Donc, $n^2 + 3n$ est pair. D'où, $n^2 + 3n$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.

③ Supposons que n n'est pas pair. Alors, n est impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ / $n = 2k+1$. Donc, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair.

Alors, n^2 n'est pas pair. Par contraposition ceci est équivalent à :

si n^2 est pair alors n est pair.

④ Fait dans le cours.

⑤ Supposons que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors

$a(1+a) = b(1+b)$, donc $a + a^2 = b + b^2$. D'où $a^2 - b^2 = b - a$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$. En divisant par $a-b$

On obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion: Si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

⑥ Notons $P(n)$ l'assertion " $2^n > n$ "

- Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.
- Fixons $n \geq 0$. Supposons $P(n)$ vraie : $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$ car $P(n): 2^n > n$.

$> n+1$ car $2^n \geq 1$.

Donc, $P(n+1)$ est vraie

- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Po3

Scanned by CamScanner

7

C'est faut, pour le prouver il suffit de donner un contre-exemple

Si $a=-3$, $b=3$, $c=-6$, $d=1$ on a $a\leq b$ et $c\leq d$

mais $ac=18>3=bd$.

Poy