Cours de Mécanique Analytique

Code:F122

Mode d'évaluation: 33%controle contenu et 67% examen

Volume horaire hebdomadaire: 3h00 cours et 1h30 Td

Chapitre 1 : Rappels de mécanique classique

Cinématique d'une particule. Dynamique d'une particule. Travail et énergie. Systèmes à N particules et forces extérieures. Degrés de liberté.

Chapitre 2 : Formalisme de Lagrange Coordonnées généralisées.

Variation fonctionnelle. Le Lagrangien. Coordonnées curvilignes. Contraintes holonomes et non holonomes. Applications : Particule dans un champ gravitationnel, Particule liée à un ressort, problème à deux corps, le potentiel central.

Chapitre 3 : Formalisme de Hamilton Transformation de Legendre. L'Hamiltonien. Variables canoniques et crochets de Poisson. Moments généralisés. Transformations canoniques. La méthode de Hamilton-Jacobi. L'espace des phases. Variables angle-action et fonction génératrice. Systèmes intégrables. **Chapitre 4 :** Mouvement d'un solide indéformable Degrés de liberté d'un solide. Energie cinétique. Axes principaux et tenseur d'inertie. Moment cinétique d'un solide. Approche vectorielle et équations d'Euler. Approche Lagrangienne et angles d'Euler. Toupie symétrique.

Chapitre 5 : Mécanique Lagrangienne des milieux continus Le passage à la limite continue. Théorie classique des champs. Equations d'Euler-Lagrange du champ.

Chapitre 6 : Théorème de Liouville. Equation de Hamilton-Jacobi

CHAPITRE 1 : Rappels de mécanique classique

1 -1. Cinématique d'une particule

La cinématique est l'étude du mouvement de la particule ou des systèmes de particules sans la recherche des causes de ce mouvement. Les causes des mouvements sont `à rechercher dans les forces, ce sera l'objet d'´étude de la dynamique.

- La description du mouvement d'une particule met en œuvre trois vecteurs :
i) Le vecteur position.
ii) Le vecteur vitesse.
iii) Le vecteur accélération.

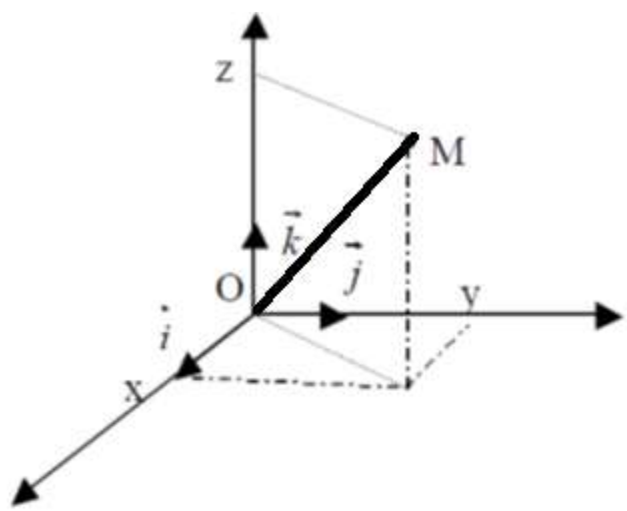
1-1.1. Vecteur position :

Soit un référentiel donné, R, à pour origine un point O, Pour localiser une particule, nous recherchons sa position relative par rapport `à l' origine: $\vec{r} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

Le vecteur position: $\vec{r}$ varie au cours du mouvement et l'ensemble des positions successives au cours du temps de son extrémité P forme une courbe appelée trajectoire de la position P.

1-1.2. Système de coordonnées cartésiennes.

En utilisant pour le repère d'espace les coordonnées cartésiennes de base orthogonale associée $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ le vecteur : $\vec{r}$ se décompose en :$\vec{r} = \mathbf{x}\vec{\imath} + \mathbf{y}\vec{\jmath} + \mathbf{z}\vec{k}$.(Dans R, $\frac{d}{dt}\vec{\imath}= \frac{d}{dt}\vec{\jmath}= \frac{d}{dt}\vec{k}= \vec{0}$)



La donnée des fonctions x=f(t), y=g(t), z=h(t) constitue les équations horaires du mouvement, celle-ci peuvent être obtenues par intégration des équations du mouvement. L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre les différentes équations horaires, ce qui n'est pas toujours en pratique possible.

Déplacement élémentaire : Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M'estprès voisin de M) s'écrit : $\overrightarrow{MM'}= d\overrightarrow{OM}= dx\vec{\imath}+ dy\vec{\jmath}+ dz\,\vec{k}$

1-1.3. Vecteur vitesse

a) **Le vecteur vitesse moyenne :** Le vecteur vitesse moyenne d 'une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 dans un repère à origine O, est donnée par:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

b) **Vitesse instantanée (vitesse).**

Le vecteur vitesse instantanée de la particule en M par rapport à un repère orthonormé R(O,xyz) est :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}$$

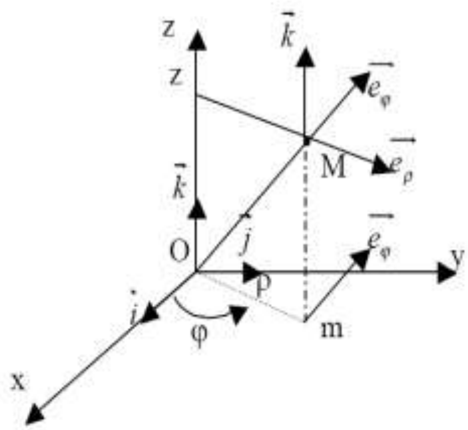
1-1.4. Vecteur accélération.

La dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse ci-dessus donne le vecteur

Accélération $\vec{a}$, qui s'écrit comme suit : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}$

1-1.5. Position, Vitesse et accélération dans un système de coordonnées cylindriques :

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques de ce point (ρ, φ, z) définies comme suit : $\rho = Om$ (m est la projection de M sur le plan (XOY), φ= angle(OX,OY) et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe OZ .



Une nouvelle base orthonormée directe ($\vec{e}\rho$, $\vec{e}\varphi$, $\vec{k}$) est associée à ce système de coordonnées Qui sont reliées aux vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$

$\vec{e}\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$\vec{e}\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$\vec{k} = \vec{k}$

Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de ρ, φ et z sont :

$0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$,

1-1.5.1. le vecteur position

$\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$.

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}.$$

1-1.5.2. Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right) = \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\vec{e}_\rho + \rho\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho\right) + \left(\frac{d}{dt}z\right)\vec{k} + z\frac{d}{dt}\vec{k}$$

On a: $\frac{d}{dt}\rho = \dot{\rho}$, $\frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{0}$, $\frac{d}{dt}z = \dot{z}$

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{e_\rho} = \frac{d}{dt}(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Donc : $\frac{d}{dt}\overrightarrow{e_\rho} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Règle générale : **La dérivée, par rapport au temps, de vecteur unitaire est donc donnée par le vecteur $\vec{e}\varphi$ qui est orthogonale à $\vec{e}\rho$ multipliée par la vitesse angulaire ($\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\varphi$)**

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

1-1.5.3. Vecteur accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}) = \left(\frac{d}{dt}\dot{\rho}\right)\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho\right) + \left(\frac{d}{dt}\rho\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\left(\frac{d}{dt}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi\right) + \left(\frac{d}{dt}\dot{z}\right)\vec{k} + \dot{z}\frac{d}{dt}\vec{k}$$

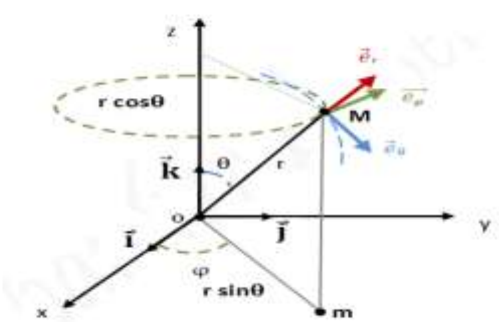
On a $\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi\right) = \frac{d}{dt}\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right) = -\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$

$\frac{d}{dt}\dot{\rho} = \ddot{\rho}$, $\frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{0}$, $\frac{d}{dt}\dot{z} = \ddot{z}$; $\frac{d}{dt}\rho = \dot{\rho}$; $\frac{d}{dt}\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

1-1.5.4. Position, Vitesse et accélération dans un système de coordonnées sphériques: (r,φ,θ)

le vecteur position : Nous rappelons que, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$; Ou : $|\overrightarrow{OM}| = r$



relations entres les vecteurs de la base sphérique $(\vec{e}r, \vec{e}\theta, \vec{e}\varphi)$ et les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$

$\vec{e}_\theta = cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} - sin\theta\vec{k}$
$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right) = \left(\frac{d}{dt}r\right)\vec{e}_r + r\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_r\right)$

On a: $\frac{d}{dt}r = \dot{r}$,

$\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_r\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r\right)\frac{d}{dt}\theta + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r\right)\frac{d}{dt}\varphi = \dot{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r\right) + \dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r\right)$

$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r\right) = cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} - sin\theta\vec{k} = \vec{e}_\theta$

$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r\right) = -sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{i} + sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{j} = sin\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = sin\theta\vec{e}_\varphi$

$\rightarrow \left(\frac{d}{dt}\vec{e}_r\right) = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Vecteur accélération en coordonnées sphériques :

$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{e}_\varphi)$

$\vec{a} = \left(\frac{d}{dt}\dot{r}\right)\vec{e}_r + \dot{r}\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_r\right) + \left(\frac{d}{dt}r\right)\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta\right) + \left(\frac{d}{dt}r\right)\dot{\varphi}\,sin\theta\vec{e}_\varphi) +$
$r\left(\frac{d}{dt}\dot{\varphi}\right)sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\left(\frac{d}{dt}sin\theta\right)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,sin\theta\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi\right)$

On a : $\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)\frac{d}{dt}\theta + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\theta\right)\frac{d}{dt}\varphi = \dot{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) + \dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\theta\right) = -\dot{\theta}(sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}$
$+ sin\theta\vec{k}) + \dot{\varphi}cos\theta(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,cos\theta\,\vec{e}_\varphi$
Et on a : $\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi\right) = -\dot{\varphi}\,(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$

On peut écrire $\vec{e}_\rho$ *dans la base* $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ comme

$\vec{e}_\rho = (\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_r)\,\vec{e}_r + (\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\theta)\,\vec{e}_\theta + (\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\varphi)\,\vec{e}_\varphi$

Calcul des produits scalaires $(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_r)$, $(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\theta)$ *et* $(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\varphi)$

$(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_r) = (\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}).\,(sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} + cos\theta\vec{k}) = sin\theta$

$(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\theta) = (\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}).(cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} - sin\theta\vec{k}) = cos\theta$
$(\vec{e}_\rho.\,\vec{e}_\varphi) = (\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}).(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = 0$

$\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi\right) = -\dot{\varphi}(sin\theta\vec{e}_r + cos\theta\vec{e}_\theta)$

Donc: $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\,(\dot{\theta}\,\vec{e}\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{e}\varphi) + \dot{r}\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\,\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,cos\theta\,\vec{e}_\varphi)$+$\dot{r}\dot{\varphi}\,sin\theta\vec{e}_\varphi$+ r$\ddot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{e}_\varphi$+ r$\dot{\varphi}\,\dot{\theta}cos\theta\,\vec{e}_\varphi$- r$\dot{\varphi}\,sin\theta\dot{\varphi}(sin\theta\vec{e}_r + cos\theta\vec{e}_\theta)$

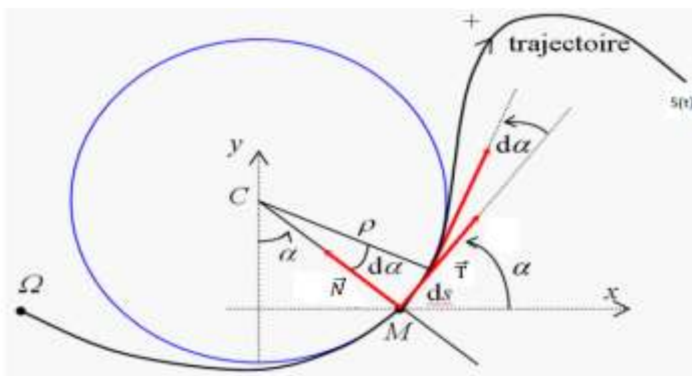
Donc l'expresssion de l'accélération en coordonnées sphériques est :

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} -$ r$\dot{\varphi}^2\, sin\theta cos\theta)\vec{e}_\theta$+$(2\dot{r}\,\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,cos\theta +$ r$\ddot{\varphi}\,sin\theta)\vec{e}_\varphi$

1-1.5.5. Repère de Frenet

l est intéressant d'introduire un repaire spécifique appelé trièdre de Serret-Frenet (Repère de Frenet), il permet d'exprimer d'une façon intrinsèque la vitesse et l'accélération, (c'est-à-dire exprimer ces grandeurs cinématique indépendamment d'un système de coordonnées particulier)., nous avons au point M :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\vec{T}$$



Le repère de Frenet défini par les vecteurs $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ et d'origine M; est un outil d'étude du comportement local des courbes. Il s'agit d'un repère local associé à un point M, décrivant une courbe (S).

$\vec{T}$:Tangente en M(t), orienté dans le sens du mouvement. $\vec{N}$:Normale à la trajectoire en M(t) perpendiculaire à $\vec{T}$, orienté vers le sens de courbure. $\vec{B}$: Binormale $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$.

$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{T}\right)$=$\frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$=$\frac{dv}{dt}\vec{T}$+$v\frac{d\vec{T}}{dt}$ tel que $v = \frac{ds}{dt}$ et $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$

À un instant t , au point M de la trajectoire, le vecteur de base $\vec{T}$ fait un angle α avec la direction de l'axe des x . À l'instant $t + dt$, ce vecteur tourne d'un angle $d\alpha$. La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par: $\frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{\alpha}\vec{N}$,

On a: $ds = \rho d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \rho\frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt}\vec{N}$=$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$

L'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$$

1-2. Dynamique d’une particule :

est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des actions mécaniques qui leur sont appliquées. Elle combine la statique qui étudie l'équilibre des corps au repos, et la cinématique qui étudie le mouvement.

1-2.1. Lois de Newton :

1-2.2. La première loi de Newton : Principe d’inertie :

Tout corps persévère dans l’état de repos ou l’état de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelques forces n’agissent sur lui, et ne le contraigne à changer d’état.

1-2.3. La deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique :

La notion de quantité de mouvement s'introduit naturellement en dynamique : en fait, la relation fondamentale de la dynamique exprime le fait que l'action d'une force extérieure sur un système conduit à une variation de sa quantité de mouvement :

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

1-2.4. La troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques:

Si un corps A exerce sur un corps B une force $\vec{F}_{A/B}$ alors B exerce sur A une force$\vec{F}_{B/A}$ telle que

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

1-2.5. Quantité de mouvement :

la quantité de mouvement $\vec{p}$ est le produit de la masse m par le vecteur vitesse $\vec{v}$d'un corps matériel supposé ponctuel. Il s'agit donc d'une grandeur vectorielle, définie par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

, qui dépend du référentiel d'étude.

1-2.6. Moment cinétique :

Le moment cinétique de M par rapport au point fixe O est:

$$\vec{L}_{/o} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

1-2.7. Moment dynamique (moment de la force)

Moment dynamique du point M par rapport au point fixe O, dans un repère R, est par définition:

$$\vec{\Gamma}_{/o} = r \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

1-2.8. Théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique énonce alors que : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point (O) égale au moment de la force appliquée sur ce point (O):

Démonstration :

$$\vec{L}_{/o} = \vec{r}\wedge\vec{p} = m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{p}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\wedge\vec{p} + \vec{r}\wedge\left(\frac{d}{dt}\vec{p}\right)$$

$\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v},\ \vec{p} = m\vec{v}$ et $\left(\frac{d}{dt}\vec{p}\right)=\vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = m\vec{v}\wedge\vec{v} + \vec{r}\wedge\vec{F}$ on sait que $\vec{v}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \vec{\Gamma}_{/o}$$

1-3. Travail et énergie :

1-3.1. Puissance et travail d'une force :

La puissance instantanée (P) d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces $\vec{F}$ qui agissent sur M par la vitesse $\vec{v}$ de ce point:

$$P = \sum \vec{F}.\vec{v}$$

L'unité de la puissance est 'Watt'' (1 Watt= 1 kg m^2 s^{-3})

Le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie $d\overrightarrow{OM}$, est donné par,

$$dW = \sum \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ on peut écrire $dW = \sum \vec{F}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,dt = \sum \vec{F}.\vec{v}\,\mathrm{dt} = P\,dt$.

Energie cinétique:

L'énergie cinétique d'une particule M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{v}$ est le scalaire E_C défini par:

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2$$

Théorème:

Le travail de la résultante, $\sum \vec{F}$ de toutes les forces (conservatives et non conservatives) appliquées à un point matériel M, dans un référentiel quelconque R, entre la position initiale A et la position finale B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B

Démonstration: $W = \int_1^2 \vec{F}.\overrightarrow{dr}$

Puisque : $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\overrightarrow{dr} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}dt = \vec{v}dt \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(\vec{v}^2)\,dt$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$$

$$W = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t_1) = \Delta E_C$$

Ou $\vec{v}(t_2)$ et $\vec{v}(t_2)$ représentent les vitesse de la particule de masse m aux instants t_2 et t_1 respectivement

1-4. Système à N particules :

Forces intérieures et forces extérieures : les forces intérieures sont celles qui sont exercées par des objets intérieurs au système ; les forces extérieures sont celles qui sont exercées par des objets extérieurs au système.

chaque force intérieure $\vec{F}_{int}$ (exercée sur un objet A par un objet B, tous deux appartenant au système) est équilibrée par une force intérieure opposée (exercée par l'objet A sur l'objet B). La résultante des forces intérieures est donc nulle :$\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}$

Quantité de mouvement totale de N particules :

La quantité de mouvement totale de ces N particules s'écrit :$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{i}} m_i\vec{v}_i$

et la masse totale $\mathrm{M} = \sum_{\mathrm{i}} m_i$

centre de masse d'un système à N particule de masse $m_1, m_2, \ \ldots, m_N$ de vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ \ldots, \vec{r}_N$est défini par le vecteur $\vec{r}_c$ comme :

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{\mathrm{i}} m_i\vec{r}_i}{\sum_{\mathrm{i}} m_i} = \frac{\sum_{\mathrm{i}} m_i\vec{r}_i}{\mathrm{M}}$$

La quantité de mouvement de ces N particules s'écrit :$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}} m_i\vec{v}_i = \sum_{\mathrm{i}} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = M\frac{d}{dt}\frac{\sum_{\mathrm{i}} m_i\vec{r}_i}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\frac{d\vec{r}_c}{dt} = M\vec{v}_c$, $\vec{v}_c$ est la vitesse du centre de masse.

autrement dit la quantité de mouvement totale du système est égale à la quantité de mouvement de son centre de masse *C de vitesse* $\vec{v}_c$ affectée de la *masse totale.*

Système à N particules et forces extérieures :

Théorème : un système de N particule se comporte comme un point matériel de masse totale M localisé dans le centre de masse soumis à une force extérieure égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur chacune des particules.

Démonstration :

$\vec{\dot{p}}_i = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{iext}$

$$\sum_i \vec{\dot{p}}_i = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_{iext}$$

$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$ et $\sum_i \vec{F}_{iext} = \vec{F}_{ext}$ et $\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\vec{r}_i = \mathrm{M}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_c = M\overrightarrow{a_c}$

Ou $\vec{a}_c$ est l'accélération du centre de masse

Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de la résultante cinétique* ou encore *théorème du centre d'inertie*: il montre que pour un système matériel l'action des forces extérieures conduit à une variation de la quantité de mouvement du centre de masse du système.

Moment Cinétique d'un Système à N particules au point O

Est défini par

$$\vec{L}_{/o} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

Introduisons les coordonnées barycentriques par rapport au centre de masse :

$\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}_i$

Tel que : $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_c$ *est le vecteur associée au centre de masse c*

$\overrightarrow{CM}_i = \overrightarrow{r'}_i$ *est le vecteur associée au point M dans le repère de c*entre de masse

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \overrightarrow{r'}_i$$

Et

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \overrightarrow{v'}_i$$

$\Rightarrow \vec{L}_{/o} = \sum_i m_i(\vec{r}_c + \overrightarrow{r'}_i)\wedge(\vec{v}_c + \overrightarrow{v'}_i)$

$= \sum_i m_i(\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c) + \sum_i m_i \vec{r}_c \wedge \overrightarrow{v'}_i + \sum_i m_i \overrightarrow{r'}_i \wedge \vec{v}_c + \sum_i m_i \overrightarrow{r'}_i \wedge \overrightarrow{v'}_i$

On a : $\sum_i m_i(\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c) = \sum_i m_i(\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c) = (\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c)\sum_i m_i = \mathrm{M}(\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c)$ (1)

$\sum_i m_i \vec{r}_c \wedge \overrightarrow{v'}_i = \vec{r}_c \wedge \sum_i m_i \overrightarrow{v'}_i = \vec{r}_c \wedge \sum_i m_i \overrightarrow{v'}_i = \vec{r}_c \wedge \vec{0} = \vec{0}$ (2)

puisque $\sum_i m_i \overrightarrow{v'}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \overrightarrow{r'}_i = \frac{d\vec{0}}{dt} = \vec{0}$

$\sum_i m_i \overrightarrow{r'}_i \wedge \vec{v}_c = (\sum_i m_i \overrightarrow{r'}_i)\wedge \vec{v}_c = \vec{0} \wedge \vec{v}_c = \vec{0}$ (3)

$$\vec{L}_{/o} = M(\vec{r}_c \wedge \vec{v}_c) + \sum_i m_i \vec{r'}_i \wedge \vec{v'}_i$$

Donc

Le moment cinétique par rapport au point o est égal à la somme du moment cinétique de centre de masse par rapport au point o et le moment cinétique par rapport au centre de masse (moment cinétique propre du système).

Energie Cinétique d'un Système à N particules :

L'énergie totale cinétique est la somme des énergie scinétiques des N particules :

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i \; v_i^2$$

On a : $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v'}_i$

$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i \; (\vec{v}_c + \vec{v'}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \; \vec{v}_c^{\,2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \; \vec{v'}_i^{\,2} + \sum_i m_i \, \vec{v}_c . \vec{v'}_i = \vec{v}_c^{\,2} \sum_i \frac{1}{2} m_i \; + \sum_i \frac{1}{2} m_i \; \vec{v'}_i^{\,2} + \vec{v}_c . \sum_i m_i \, \vec{v'}_i = \frac{1}{2} M \vec{v}_c^{\,2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \; \vec{v'}_i^{\,2}$

Puisque : $\vec{v}_c . \sum_i m_i \, \vec{v'}_i = \vec{v}_c . \vec{0} = \vec{0}$

$$E_C = \frac{1}{2} M \vec{v}_c^{\,2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \; \vec{v'}_i^{\,2}$$

L'énergie totale cinétique est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie des particules par rapport au centre de masse :

1-5. Degrés de libertés :

Pour définir la position de N particules dans l'espace, il est nécessaire de spécifier N vecteurs position, donc 3N coordonnées. Le nombre de coordonnées indépendantes devant être spécifiées pour définir de manière unique la position d'un tel système est appelé le nombre de degrés de liberté du système. Ici, ce nombre vaut 3N.

Exemples : une particule pouvant se déplacer dans une direction possède un (1°) degré de liberté.

Une particule est libre de se déplacer dans un espace à deux dimensions, elle possède deux (2°) degrés de liberté.

Une particule est libre de se déplacer dans un espace à trois dimensions, elle possède trois (3°) degrés de liberté.