Université Mohamed Boudiaf M'sila
Faculté de Mathématiques et d'informatiques
Département de Mathématiques
Troisième année licence mathématiques LMD (Semestre 05)

Module: mesure et intégration

Responsable: SAADI Abderachid

Soit X un ensemble non vide, $\mathcal{P}(X)$ représente l'ensemble des parties de X.

1 Préliminaires

Définition 1. *La fonction indicatrice χ_A de la fonction A est la fonction de X dans $\{0,1\}$, définit comme suivant:*

$$\forall x \in X : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

Exercice 1. *Représenter graphiquement* $\sum_{n\geq 0} \chi_{[n,+\infty[}$.

Définition 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la limite supérieure $\overline{\lim}\, u_n$ et la limite inférieure $\underline{\lim}\, u_n$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suivant:*

$$\overline{\lim}\, u_n = \lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geq p} u_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq p} u_n \qquad \underline{\lim}\, u_n = \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geq p} u_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq p} u_n$$

On a: $\underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n$.

Exercice 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par: $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.*
Trouver: $\overline{\lim}\, u_n, \underline{\lim}\, u_n$.

2 Tribus

Soit $\mathcal{A}$ une collection non vide des parties de X.

Définition 3. *On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu ($\sigma-$ algèbre) sur X si et seulement si:*

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

ii) *Pour toute $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.*

iii) *Pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$, on a: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.*

Définition 4. *Toute couple $(X, \mathcal{A})$, ou $\mathcal{A}$ est une tribu sur X, est appelée espace mesurable. Les éléments de A sont appelés des ensembles mesurables.*

Remarque 1. *Soit $\mathcal{C}$ une collection des parties de X. Alors, il existe une tribu minimale $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, contient $\mathcal{C}$. Cette tribu est appelée la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

Exercice 3. *Soit* $X = \{a, b, c, d\}$*, et soit* $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}\{b, c, d\}, X\}$.
Quels sont les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$*, la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *?*

Définition 5. *Soit* (X, τ) *un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur* X *par rapport à* τ*, et on le note par* $\mathcal{B}_\tau(X)$ *la tribu engendrée par* τ.
Les éléments de celle tribu sont appelé les ensembles boréliens.

Remarque 2. *On désigne par* $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ *la tribu borélienne engendrée par la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$.

Exercice 4. *Soit* $X = \{a, b, c, d\}$*, muni de la topologie* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

(i) *Trouver la tribu Borélienne* $\mathcal{B}_\tau(X)$ *basée sur la topologie* τ.

(ii) *Existe - il des sous ensembles de* X *n'appartient pas à* $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 5. *Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de* $\mathbb{R}^2$*:*

i) *La diagonale* $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

ii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \notin \mathbb{Q}\}$.

3 Mesure

Définition 6. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable, et soit la fonction* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$*. On dit que* μ *et une mesure positive si et seulement si:*

i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$,

ii) $\mu(\emptyset) = 0$,

iii) *pour toute suite* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *des éléments disjoints deux à deux de* $\mathcal{A}$*, on a:* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(cette propriété est appelée la propriété de $\sigma-$ *additivité).*

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est appelée un espace mesuré.*

Remarque 3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

i) *Si* $\mu(A) < \infty$*, on dit que* μ *est une mesure finie.*

ii) *Si* $\mu(X) = 1$*, on dit que* μ *est une mesure de probabilités.*

ii) *S'il existe une recouvrement dénombrable* $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *des éléments de* $\mathcal{A}$ *tel que* $\mu(A_n)$ *fini pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on dit que* μ *est une mesure* $\sigma-$ *fini.*

Exercice 6. *On se donne un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$*, et on note par* δ_x *la mesure de Dirac au point* $x \in X$*. Soit* $x_1, x_2, \ldots x_N$ *des élément distincts de* X*, et* $p_1, p_2, \ldots p_N$ *des nombres réels positifs. On note:*

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ A & \to & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i \delta_{x_i}(A) \end{array}$$

Montrer que μ *est une mesure sur* X.

4 Fonctions mesurables

Soit X, Y deux ensembles non vides, $\mathcal{A}$ une tribu sur X, $\mathcal{B}$ une tribu sur Y, et $f : X \to Y$ une application.

Définition 7. *Soit $\mathcal{G}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. L'image réciproque de $\mathcal{G}$ par l'application f est l'ensemble suivant:*

$$f^{-1}(\mathcal{G}) = \{A \in \mathcal{P}(X), \exists B \in \mathcal{G} : A = f^{-1}(B)\}.$$

Proposition 1. *Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. Alors, $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$, est une tribu sur X, dite la tribu de l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par l'application f.*

Définition 8. *On dit que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.*
On désigne par $\mathcal{M}((X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}))$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $Y, \mathcal{B})$.

Définition 9. *On munit $(X, \mathcal{A})$ d'une mesure positive μ. On dit que deux fonctions f et g de $(X, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{B})$ sont $\mu-$ équivalentes si $f \equiv g$ presque par tout, et on écrit $f = g (mod\, \mu)$ ou $f = g\, \mu-ppt$*

Exercice 7. *Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.*

Théorème 1. *Soit f une application de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors: les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$,
2. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathcal{A}$,
3. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$,
4. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}$,
5. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$.

Corollaire 1. *La fonction indicatrice d'une partie mesurable est une fonction mesurable.*

Exercice 8. *On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Soit $k > 0$, et T_k la fonction définit par:*

$$\forall t \in \mathbb{R} : T_k(x) = \frac{1}{2}(|t + k| - |t - k|).$$

1. *Représenter graphiquement T_k.*
2. *T_k est elle fonction mesurable?*
3. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Montrer que la fonction $T_k \circ f$ est une fonction mesurable*

5 Types de convergence

On munit $(X, \mathcal{A})$ d'une mesure positive μ, et soit $\{f_n\}$ une suite des fonctions de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Notons par $d(a, A)$ la distance usuelle entre $a \in \mathbb{R}$ et l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$

Définition 10. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge $\mu - ppt$ simplement, s'il existe $N \subset X$, $\mu-$ négligeable telle que f_n converge simplement vers f dans N^c.*

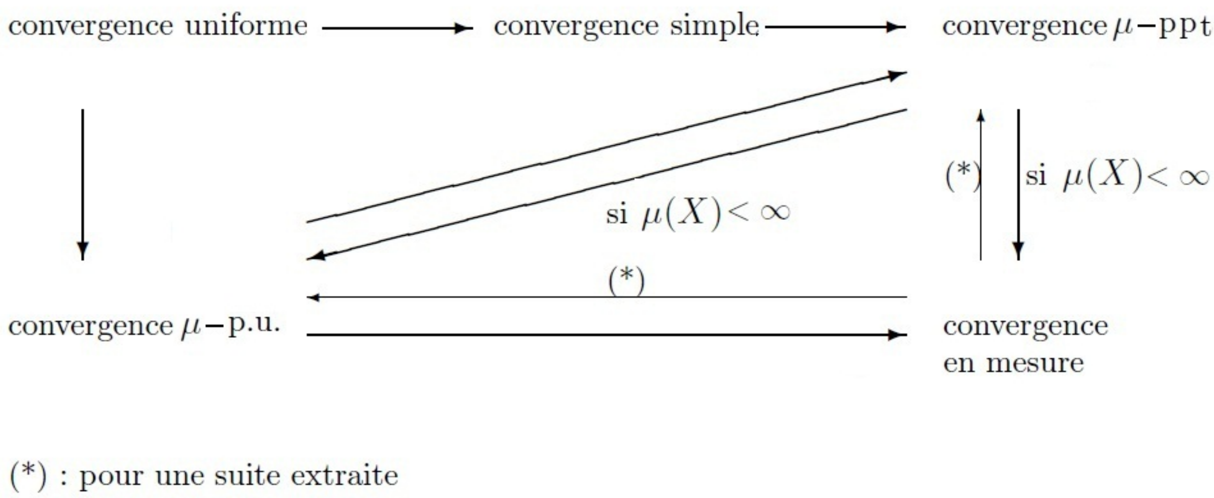
Définition 11. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge $\mu - ppt$ uniformément, s'il existe $N \subset X$, $\mu-$ négligeable telle que f_n converge uniformément vers f dans N^c.*

Définition 12. *On dit que la suite $\{f_n\}$ est convergente par la mesure μ, et on écrit $f_n \xrightarrow{\mu} f$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Définition 13. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge vers f presque uniformément (et on écrit $f_n \longrightarrow f$ $\mu - p.u.$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A_ε telle que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, et $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur A_ε^c.*

La figure ci-dessu est extraire de
C. Bourdarias: Intégration et application. *Université Chambry Annecy de savoie, 2000.*



Exercice 9. : *Etudier la convergence par mesure de la suite $(f_n)_n$ a la fonction nulle, ou*

$$f_n(x) = \frac{2x}{1 + n^2x^2}, \ \forall x \geq 0$$

.

6 Fonctions intégrables

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la tribu borélienne, et soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Toutes les fonctions sont des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 14. *On dit qu'une fonction f de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ est une fonction simple (étagée) si l'ensemble $f(X)$ est une ensemble fini.*

Définition 15. *Soit φ une fonction simple, positive, définie sur X comme suivant:*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

où $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ est une partition de X, et $\{a_i\}_{i=1}^n$ est une suite réelle. L'intégrale de la fonction φ sur l'ensemble X par rapport à la mesure μ est le nombre positif achevé:

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{1}$$

Remarque 4. *Sachant que $0.\infty = 0$, on a $\int_X \varphi d\mu = 0$ si $\varphi = 0$ ppt sur X.*

Définition 16. *Soit f une fonction positive, mesurable, définie sur X, et soit $\mathcal{F}_f$ l'ensemble des fonctions simples φ, satisfaites: $0 \leq \varphi \leq f$. L'intégrale de la fonction f sur l'ensemble X par rapport à la mesure μ est le nombre positif achevé:*

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi \in \mathcal{F}_f \right\}. \tag{2}$$

Définition 17. *Soit f une fonction mesurable sur X, on pose: $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ (si il est définit).*

Définition 18. *Soit f une fonction mesurable sur X. On dit que f est Lebesgue intégrable si f est mesurable et $\displaystyle\int_X |f| d\mu < +\infty$. On désigne par $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Exercice 10. *Soit $p \in]0, +\infty[$. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ, et soit f la fonction définit par:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = |x|^{-p}.\chi_{]-1,1[}.$$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

7 Théorèmes de convergence

Théorème 2. [***convergence monotone de Beppo Levi***] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante des fonctions mesurables, positives, bornées $\mu-$ ppt sur X. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ existe partout, positive, mesurable, et on a:*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \sup_n \int_X f_n d\mu$$

.

Théorème 3. [***Lemme de Fatou***] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions mesurables sur X. Supposons qu'il existe une fonction intégrable g telle que $g \leq f_n$, pour tout n. Alors:*

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

.

Théorème 4. [***Convergence dominée de Lebesgue***] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions intégrables sur X. Supposons que:*

1. *$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mu-$ ppt vers une fonction f.*
2. *Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g$ μ ppt pour tout n.*

Alors: f est intégrable et $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ (ce qui donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$).

Théorème 5. [***continuité sous signe d'intégrale***: *Soit $f(x,t)$ une fonction définie sur $X \times]a, b[$. Supposons que la fonction $f(.,t)$ est mesurable pour tout $t \in]a, b[$, et on pose:*

$$G(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x).$$

Soit $t_0 \in]a, b[$, on suppose que:

1. *La fonction $f(x,t)$ est continue au point t_0, et $\mu-$ ppt sur X.*

2. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout t au voisinage de t_0 on a: $F(x,t) \leq g(x)$ $\mu-$ ppt sur X.*

Alors, la fonction G est continue au point t_0).

Théorème 6. [***dérivabilité sous signe d'intégrale***] : *Soit $F(x,t)$ une fonction définie sur $X\times]a,b[$. Supposons que la fonction $F(.,t)$ est intégrable pour tout $t \in]a,b[$, et on pose:*

$$G(t) = \int_X F(x,t)d\mu(x).$$

Soit $t_0 \in]a,b[$, on suppose que:

1. $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)$ *existe $\mu-$ ppt sur X.*

2. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout t au voisinage de t_0 on a: $\dfrac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0} \leq g(x)$ $\mu-$ ppt sur X.*

Alors: $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)$ *existe est intégrable et on a:*

$$\left\{\frac{dG}{dt}\right\}_{t=t_0} = \int_X \frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)d\mu(x)$$

.

Exercice 11. *Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, définie sur $\mathbb{R}^+$ comme suivant: $f_n(x) = e^{-x^n}$.*

1. *Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, converge vers une fonction f.*

2. *Est -ce- qu'on peut appliquer théorème de Beppo Levi au suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, sur $I=[0,1]$.*

3. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n$.*

4. *Est -ce- qu'on peut appliquer théorème de Beppo Levi au suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, sur $J=]1,+\infty[$.*

5. *Est -ce- qu'on peut appliquer théorème de Lebesgue au suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, sur $\mathbb{R}^+$.*

6. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^+} f_n$.*

Exercice 12. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suite des fonctions définie sur $I=[0,1]$ comme suivante: $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.*

1. *Montrer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.*

2. *Est -ce- que ette convergence est uniforme?*

3. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n dx \neq \int_I f dx$.*

4. *Peut-on appliquer le lemme de Fatou à cette suite?*

5. *Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à cette suite?*

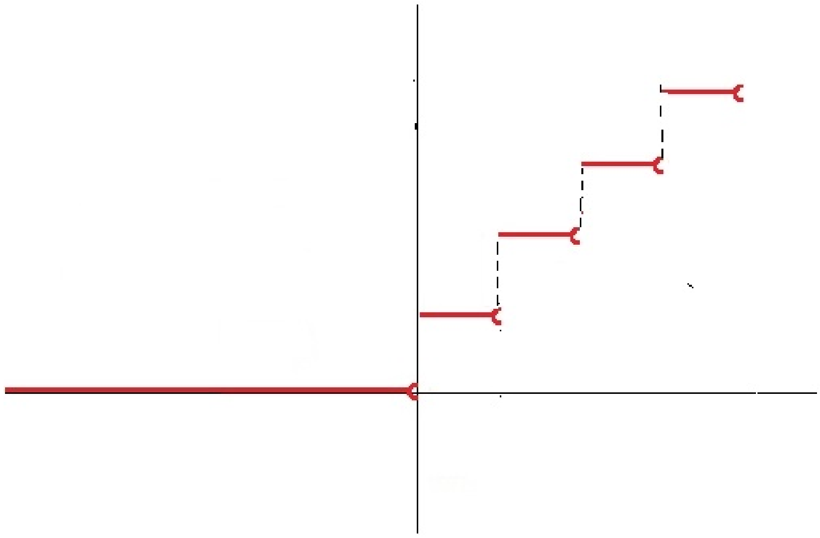
8 Solutions des exercices

Solution 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a:* $\chi_{[n,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < n \\ 1 & : \quad x \geq n \end{cases}$.

Donc: $\forall x < 0 : \chi_{[n,+\infty[}(x) = 0$, *i.e* $\forall x < 0 : \sum\limits_{n \geq 0} \chi_{[n,+\infty[}(x) = 0$.

Maintenant soit $x \geq 0$, *on sais que* $x < [x] + 1$. *Donc:* $\forall n \geq [x] + 1 : \chi_{[n,+\infty[}(x) = 0$,

i.e $\forall x \geq 0 : \sum\limits_{n \geq 0} \chi_{[n,+\infty[}(x) = \sum\limits_{n=0}^{[x]} 1 = 1 + [x]$.



Solution 2. *On sais que*

$$\overline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} \sup_{n \geq p} u_n = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq p} u_n \qquad \underline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} \inf_{n \geq p} u_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq p} u_n$$

Soit $(v_p), (w_p)_n$ *deux suites réelles telles que:* $\quad v_p = \sup\limits_{n \geq p} u_n \qquad w_p = \inf\limits_{n \geq p} u_n$.

Alors:

$$\begin{array}{lclcl}
v_{2k} & = & \sup\{2 + \frac{1}{2k}, 2 - \frac{1}{2k+1}, \cdots\} & = & 2 + \frac{1}{2k}, \\
v_{2k+1} & = & \sup\{2 - \frac{1}{2k+1}, 2 + \frac{1}{2k+2}, \cdots\} & = & 2 + \frac{1}{2k+2}, \\
w_{2k} & = & \inf\{2 + \frac{1}{2k}, 2 - \frac{1}{2k+1}, \cdots\} & = & 2 - \frac{1}{2k+1}, \\
w_{2k+1} & = & \inf\{2 - \frac{1}{2k+1}, 2 + \frac{1}{2k+2}, \cdots\} & = & 2 - \frac{1}{2k+1}.
\end{array}$$

Donc:

$$\overline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} v_p = 2 \qquad \underline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} w_p = 2$$

Solution 3. $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}\{b, c, d\}, X\}$.
Soient $A, B \in \mathcal{C}$, *alors:*
* $A^c, B^c \in \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\{b, c, d\}, X\}$.
* $A \cup B \in \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.
* $A \cap B \in \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.
* $A^c \cup B^c \in \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\}$.
* $A^c \cap B^c \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.
* $A^c \cup B \in \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.
* $A^c \cap B \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.

Alors: $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.

Solution 4. $X = \{a, b, c, d\}$, *muni de la topologie* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$.

(i) *Si* $a \in \tau$ *alors* $A^c \in F = \{\emptyset, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$.
En remarquant que $\tau \cup F = \mathcal{P}(X)$. *Donc:* $\mathcal{B}_\tau(X) = \mathcal{P}(X)$.

(ii) *Puisque* $\mathcal{B}_\tau(X) = \mathcal{P}(X)$, *il n'existe pas des sous ensembles de* X *n'appartient pas à* $\mathcal{B}_\tau(X)$.

Solution 5. *Montrons que les ensembles suivants sont des boréliens de* $\mathbb{R}^2$*:*

i) *La diagonale* $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.
Soit la fonction f *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *définie par* $f(x, y) = x - y$.
f *est continue,* $\Delta = f^{-1}(\{0\})$, *i.e image réciproque d'un fermé.*
Donc: Δ *est fermé, donc borélien.*

ii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \notin \mathbb{Q}\}$.
Soit la fonction g *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *définie par* $g(x, y) = x^2 + y^2$.
f *est continue,* $E = g^{-1}(\{1\}) \cap (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{R})$,
i.e image réciproque d'un $g^{-1}(\{1\})$ *fermé, donc borélien.*
$\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$, *union dénombrable des fermés, donc borélien. Alors;* $\mathbb{Q}^c \times \mathbb{R}$ *est borélien.*
Donc, $E = g^{-1}(\{1\}) \cap (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{R})$ *est borélien.*

Solution 6. $(X, \mathcal{A})$ *espace mesurable,* δ_x *la mesure de Dirac au point* $x \in X$, $x_1, x_2, \ldots x_N$ *des élément distincts de* X, *et* $p_1, p_2, \ldots p_N$ *des nombres réels positifs.*

$$\begin{array}{rcl} \mu \;:\; \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ A & \to & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i \delta_{x_i}(A) \end{array}$$

i) *Il este clair que* μ *est positive.*

ii) *On a* $\forall i : \delta_{x_i}(\emptyset) = 0$, *donc* $\mu(\emptyset) = 0$.

iii) *Soit* $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ *une suite des éléments disjoints de* $\mathcal{A}$, *alors* $\mu(A_n) \sum_{i=1}^{N} p_i \delta_{x_i}(A_n)$.

Soit $i_0 \in 1, 2, \cdots, N, n_0 \in \mathbb{N}$. *Si* $x_{i_0} \in A_{n_0}$ *alors* $x_{i_0} \notin A_n$, *pour tout* $n \neq n_0$.

Donc: $\mu(A_n) = \displaystyle\sum_{i=1 x_i \in A_n}^{N} p_i$. *Alors:*

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_i \delta_{x_i}(A) &= \sum_{n} \sum_{i=1, x_i \in A_n}^{N} p_i \\ &= \sum_{n} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(*En remarquant qu'il existe une infinité des éléments de* $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ *tels que* $\mu(A_n) = 0$ *puisque* $\{x_1, x_2, \cdots x_N\}$ *est fini*).

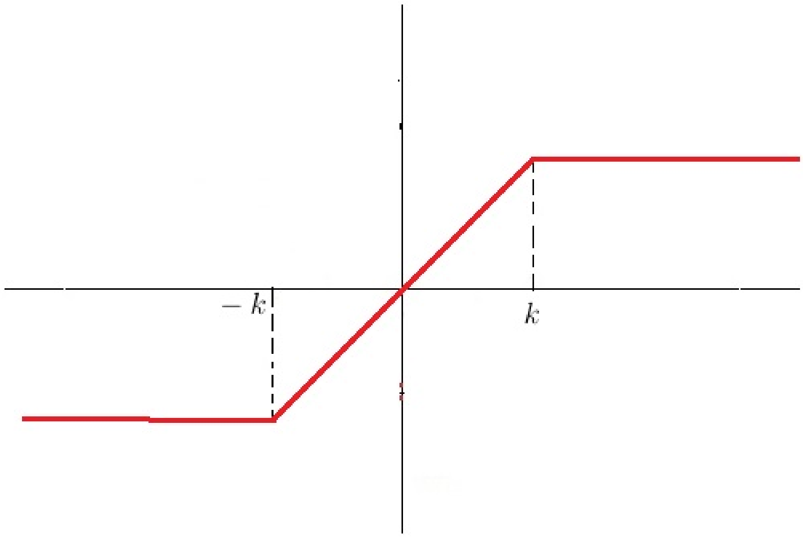
Alors: μ *est une mesure sur* X.

Solution 7. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, f *fonction de* $(X, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.
f *est mesurable si et seulement si* $\forall B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : f^{-1}(B) = X$ *ou* $f^{-1}(B) = \emptyset$.
Si f *est une fonction constante telle que* $f = a \in \mathbb{R}$ *on a* $f^{-1}(a) = X$ *et* a *est borilien. Donc: les fonction constants sont mesurables.*
Supposons maintenant que f *n'est pas mesurable, et soit* $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a \in Imf$. *Alors* $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ *puisque* f *n'est pas constante, il existe* $x \in X$ *tel que* $f(x) \neq b$. *Donc:* $f^{-1}(b) \neq X$.
Alors, f *n'est pas mesurable.*
Les fonctions mesurables sont seulement les fonctions constantes.

Solution 8. *$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne, $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $k > 0$, et T_k la fonction définit par:*

$$\forall t \in \mathbb{R} : T_k(x) = \frac{1}{2}(|t + k| - |t - k|).$$

1. *Représentation graphique de T_k.*



2. *T_k est continue, donc mesurable.*

3. *Puisque f est mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et T_k est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, alors: la fonction $T_k \circ f$ est une fonction mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

Solution 9. $f_n(x) = \dfrac{2x}{1 + n^2x^2}$, $(x \geq 0)$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $A_\varepsilon = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Soit $x \in A_\varepsilon$, alors: $\dfrac{2x}{1 + n^2x^2} \geq \varepsilon$.
Donc, $n^2\varepsilon x^2 - 2x + \varepsilon \leq 0$, $\quad \Delta' = 1 - n^2x^2$.
Pour n assez grand (i.e $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$) on a $A_\varepsilon = \emptyset$, i.e $\lambda(A_\varepsilon) = 0 \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc: $(f_n)_n$ converge par mesure à la fonction nulle.

Solution 10. $p \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = |x|^{-p}.\chi_{]-1,1[}$.
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{-1}^{1} |x|^{-p} dx = 2\int_0^1 x^{-p} dx$. *Alors:*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \begin{cases} \dfrac{2}{1-p} & : \ p \in]0, 1[, \\ +\infty & : \ p \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Solution 11. $f_n(x) = e^{-x^n}, x \geq 0$.

1. $x \in I = [0, 1]$

   $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, converge vers la fonction f, définie par: $f(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & : \ x = 1, \\ 0 & : \ x > 1. \end{cases}$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a:* $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \exp(x^n - x^{n+1})$.

   Puisque $x^n - x^{n+1} \geq 0$, on a: $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leq 1$. Donc: la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante.
   On peut alors appliquer théorème de Beppo Levi au suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, sur $I = [0, 1]$.

3. *On a:*

   i) $f_n \longrightarrow 0, ppt$ *sur* I,

   ii) $f_n \leq 1, \forall x \in I$,

   iii) $\int_I 1 = 1 < +\infty$, *i.e* $1 \in L^1(I)$.

   d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue:
   $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I 1 = 1.$

4. $J =]1, +\infty[$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a:* $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \exp(x^{n+1} - x^n) \geq 1.$
   $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est positive, décroissante, mesurable. Donc: on peut appliquer théorème de Beppo Levi au suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *sur* J.

5. *On a:*

   i) $f_n \longrightarrow f, ppt$ *sur* $\mathbb{R}^+$,

   ii) $f_n \leq g$, *ou* $g(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & : \ x > 1. \end{cases}$,

   iii) $\int_{\mathbb{R}^+} g = 1 + \dfrac{1}{e} < +\infty$, *i.e* $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

   On peut alors appliquer théorème de Lebesgue au suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *sur* $\mathbb{R}^+$.

6. $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \int_{\mathbb{R}^+} f = \int_0^1 dx = 1.$

Solution 12. $I = [0, 1], f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge simplement vers* $f = 0$.

2. *On a:* $\sup |f_n - f| = \sqrt{2n} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\right) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Donc: la convergence n'est pas uniforme.*

3. $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n dx = \lim_{n\to+\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1 \neq 0 = \int_I f dx.$

4. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est une suite des fonctions mesurables telle que* $f_n \geq g = 0$.
   Donc: on appliquer le lemme de Fatou à la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

5. $\sup |f_n| \longrightarrow +\infty$, *on ne peut pas trouver une fonction intégrable* g *telle que* $f_n \leq g$. *Donc: on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à cette suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.