# C HAPITRE II
# Symétrie des figures finies

## II.1 Introduction

Une symétrie est une propriété d'invariance d'un objet par une transformation de l'espace. L'étude des symétries à l'échelle macroscopique permet de discuter les caractéristiques d'anisotropie des propriétés physiques dans un matériau. A l'échelle microscopique, l'identification des symétries simplifie la description structurale des assemblées d'atomes.

Une figure F possède la symétrie s'il existe une ou plusieurs opérations (de symétrie) qui, appliquées aux éléments de la figure F la transforme en une autre figure F' indiscernable de F. On dit que l'opération « restitué » la figure initiale.

## II.2 Opérations de symétrie

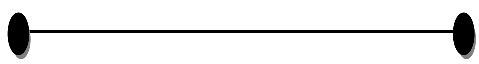
La symétrie externe des cristaux se caractérise par la présence des éléments de symétrie suivants : La rotation, la réflexion, l'inversion, l'inversion rotatoire, la rotation suivie ou précédée d'une réflexion, la réflexion suivie d'une inversion et la translation.

## II.2.1 La rotation

Opération de symétrie s'effectuant par rotation d'un angle de $\theta = \frac{2\pi}{n}$ autour d'une ligne appelée axe de symétrie. n est toujours un nombre entier qui représente l'ordre de l'axe, n= 1, 2, 3, 4, 6.

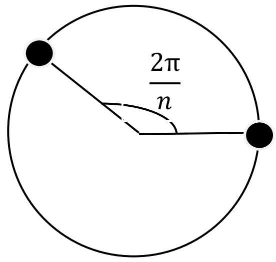
L'axe d'ordre 1 (rotation d'un tour complet $\theta = 2\pi$ ) correspond à l'opération « identité », ce qui équivaut à une absence de symétrie. N'importe quelle ligne dans n'importe quelle figure est un axe d'ordre 1.

Quand l'axe 2 est dans le plan du dessin on le représente par :



Quand l'axe 2 est perpendiculaire au plan du dessin on le représente par : 

Ainsi, après n rotations successives, on retrouve le point de départ. On appellera ce type de rotation, rotation n ou d'ordre n. Ainsi, une rotation 4 implique une rotation de $\theta = \frac{\pi}{2}$.




Le tableau II.1 rassemble les différentes rotations que nous utiliserons.

| **Symbole de l'axe** | **Représentation graphique** | **Terminologie** | **Interprétation** |
|---|---|---|---|
| **1** | / | Identité | Rotation de $2\pi/1$ |
| **2** | ⬮ | Axe binaire | Rotation de $2\pi/2$ |
| **3** | ▲ | Axe ternaire | Rotation de $2\pi/3$ |
| **4** | ◆ | Axe quaternaire | Rotation de $2\pi/4$ |
| **6** | ⬢ | Axe sénaire | Rotation de $2\pi/6$ |

## II.2.2 L'inversion (centre de symétrie)

Une figure possède la symétrie d'inversion par rapport à un point, appelé centre d'inversion ou de symétrie, si à tout point de coordonnées (x, y, z) correspond un symétrique en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, sachant que le centre de symétrie étant à l'origine des axes, la figure est dite alors centro-symétrique.

Symbole d'un centre de symétrie : $C_i$ ou $\bar{1}$ .

## II.2.3 La Réflexion

Une figure possède cette symétrie si une moitie de la figure est l'image spéculaire de l'autre moitie dans un plan de symétrie (miroir).

Un miroir est symbolisé par : m

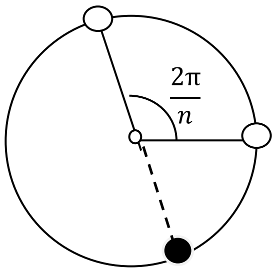
Représentation graphique Pour un miroir perpendiculaire au plan du dessin.

## II.2.4 L'inversion rotatoire

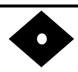
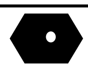
Opération qui peut être décomposée en deux opérations: rotation d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$ suivie ou précédée nécessairement d'une inversion dans un centre situé sur l'axe de rotation. L'élément de symétrie est appelé axe d'inversion.

Symbole d'un axe d'inversion : $\bar{n}$ et $\bar{n} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$

$\bar{n} = n \times \bar{1} = \bar{1} \times n$

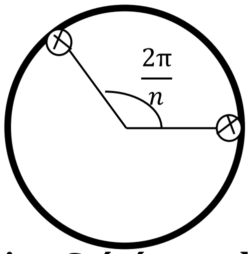



Représentations graphiques et symboles des axes d'inversion:

| Symbole de l'axe | Représentation graphique | Terminologie Axe d'inversion |
|---|---|---|
| $\bar{\mathbf{1}}$ |  | Inversion (centre de symétrie) |
| $\bar{\mathbf{2}}$ |  | d'ordre 2 |
| $\bar{\mathbf{3}}$ |  | d'ordre 3 |
| $\bar{\mathbf{4}}$ |  | d'ordre 4 |
| $\bar{\mathbf{6}}$ |  | d'ordre 6 |

## II.2.5 La Réflexion rotatoire

Opération qui consiste en une rotation d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$ suivie ou précédée nécessairement d'une réflexion dans un plan (miroir) perpendiculaire à l'axe. L'élément de symétrie est appelé axe de réflexion.

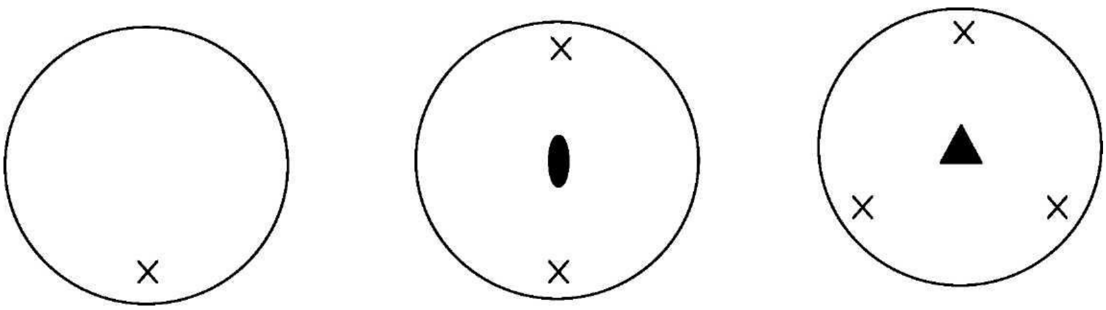



## II.3 Points équivalents (Projection Stéréographique)

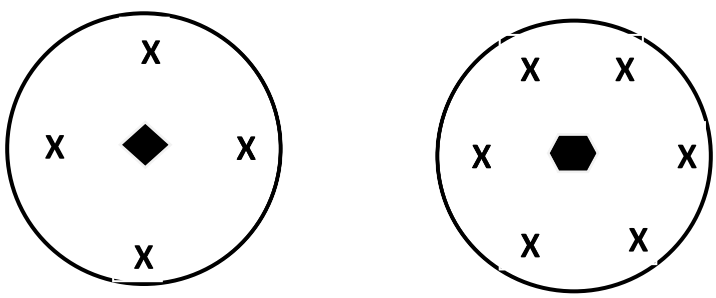
Il est quelquefois utile de représenter un opérateur de symétrie par l'ensemble des points équivalents que l'on obtient en répétant l'opération autant de fois que nécessaire, au départ d'un premier point.

La projection stéréographique permet de visualiser les éléments de symétrie et les directions équivalentes au sein d'un groupe ponctuel de l'espace à trois dimensions, sur une représentation plane.

### II.3.1 Axes de rotation (n)

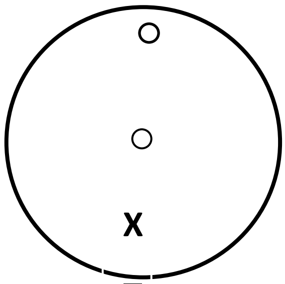


**1** **2** **3**

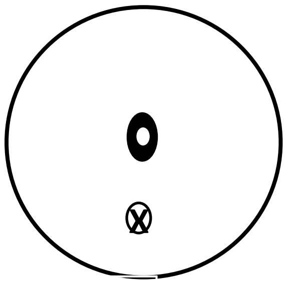


**4** **6**

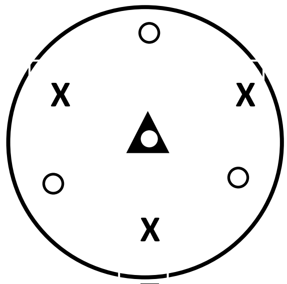
**II.3.2 Axes d'inversion ($\bar{n}$ )**



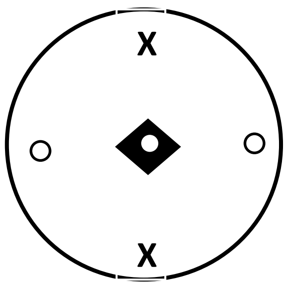
$\bar{1}$



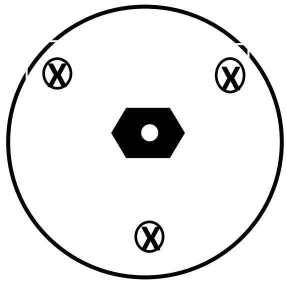
$\bar{2}$



$\bar{3}$



$\bar{4}$



$\bar{6}$

## II.4 Groupes de symétrie

Lorsqu'une figure possède un ou plusieurs éléments de symétrie, les opérations de symétrie forment un groupe au sens mathématique du terme.

1- le groupe **n** et n= 1, 2, 3, 4, 6

2- le groupe $\bar{n}$ et $\bar{n} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$

3- le groupe n/m : un miroir perpendiculaire à l'axe directe **n**. on obtient trois nouveaux groupes:

**2/m , 4/m, 6/m,** et on a **1/m =m** et **3/m = $\bar{6}$**

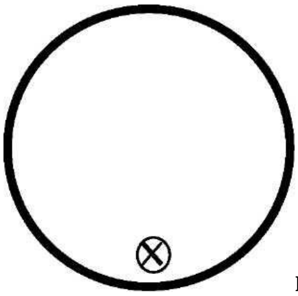
4- le groupe nm : un miroir passant ( // ) par un axe directe n . on trouve les groupes: **2mm, 3m, 4m, 6m.**

5- le groupe $\bar{n}$m : un miroir passant par un axe inverse $\bar{n}$ . On trouve $\bar{3}m$ , $\bar{4}m$, $\bar{6}m$

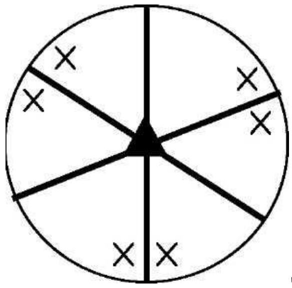
6- le groupe n2 : axe d'ordre 2 perpendiculaire au axe directe **n**. on trouve **22, 32, 42, 62**

7- le groupe n/mm : un axe directe **n** et un miroir passant par cet axe et d'un miroir perpendiculaire à l'axe principale **n**. on trouve **mmm, 4/mm , 6/mm**

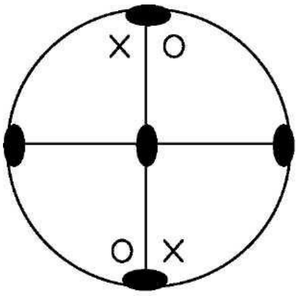
**Exmple:**



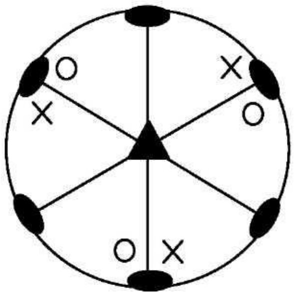
**m**



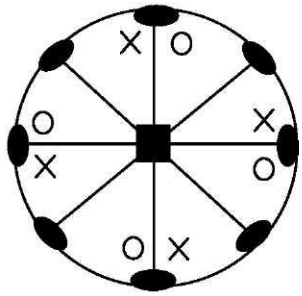
**3m**



**222**



**32**



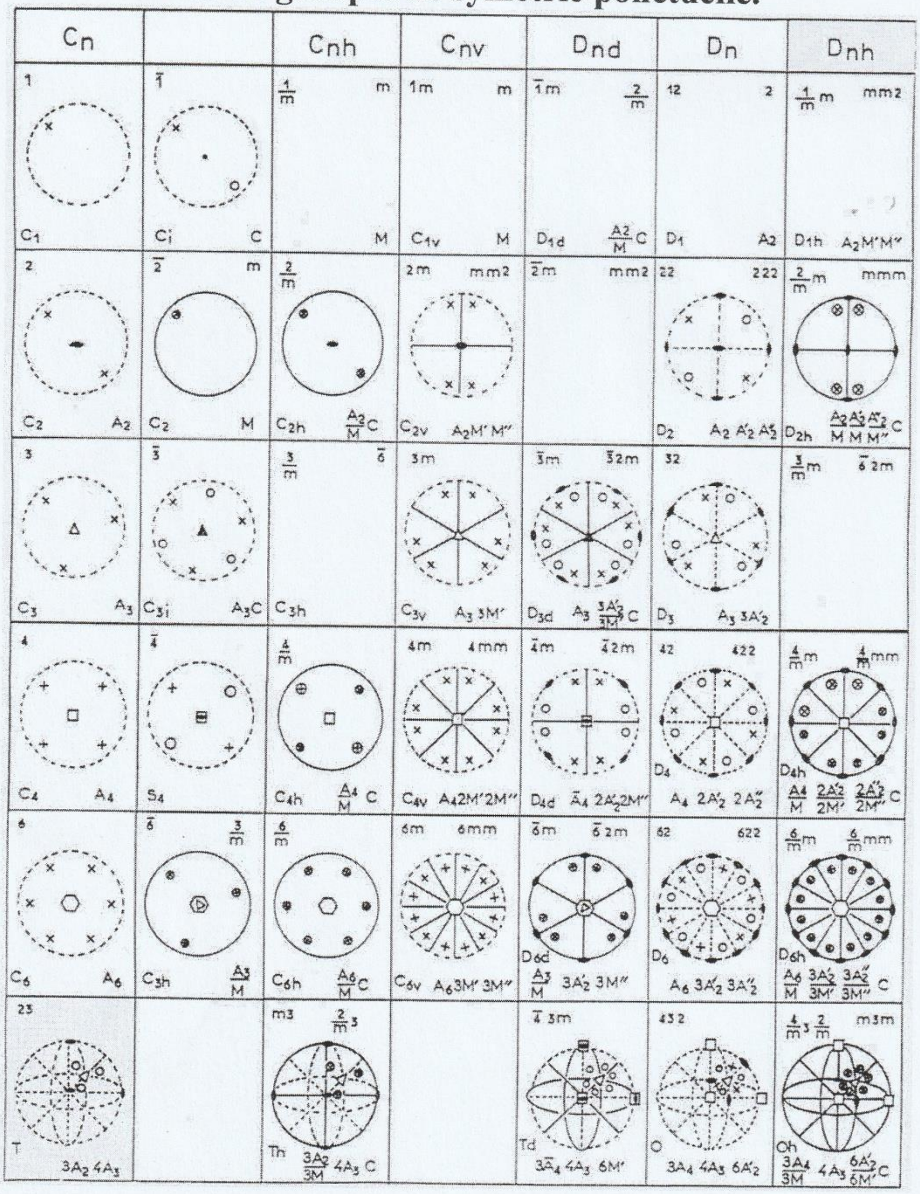
**422**

## II.5 Représentation et répartition des 32 classes cristallines

Le dénombrement des groupes ponctuels cristallographiques à trois dimensions est abouti à 32 groupes ponctuels (32 classes cristallines).

Les projections stéréographiques des classes de symétrie cristalline, au nombre de 32, sont représentées sur la Figure II.1. Les classes de symétrie sont également appelées groupes ponctuels cristallographiques.

## Les 32 groupes de symétrie ponctuelle.



## II.6 Degré de symétrie d'une classe cristalline

Pour déterminer le degré de symétrie dune classe cristalline on utilise la projection stéréographique. le degré de symétrie (s) peut également se calculer à l'aide de relation suivante:

$$s = 1 + n_2 + 2\,n_3 + 3\,n_4 + 5n_6$$

ou $n_2$, $n_3$, $n_4$ , $n_6$ représentent le nombre d'axes binaires, ternaires, quaternaires et sénaires respectivement.

- Si la classe possède en plus un centre de symétrie. le degré de symétrie de cette classe est donné par:

$$S = 2s$$

Exemple:

1-la classe 32: d' après la projection stéréographique de la classe 32, on trouve:

$$s = 1 + 3 + 2.1 + 3.0 + 5.0 = 6$$

2- la classe 2/mm:

$$s = 1 + 3 + 2.0 + 3.0 + 5.0 = 4$$

Cette classe possède un centre de symétrie donc $S = 2\,s = 8$

## II.7 Les classes centro-symétrie (classe de Laue)

D'après les projections stéréographiques, il y a 11 classes de symétries possèdent un centre de symétrie. Ce sont les 11 classes de Laue ($\bar{1}$, $\frac{2}{m}$ , $mmm$, $\frac{4}{m}$ , $\frac{4}{mm}$, $\bar{3}$, $\bar{3}\,m$ , $\frac{6}{m}$ , $\frac{6}{mm}$ , $m\bar{3}$ , $m\bar{3}m$ )