الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF –M'SILA-

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Cours des

Equations différentielles

Par:

Tallab Abdelhamid

Troisième année Licence Mathématiques (L.M.D)

Table des matières

Notations

Notation		Page
$\mathbb{K}$	$(\mathbb{K},+,\bullet)$ est un corps commutatitif si $(\mathbb{K},+)$, $(\mathbb{K}-\{0_{\mathbb{K}}\},\bullet)$ sont des groupes abéliens, où $0_{\mathbb{K}}$ est l'element neutre de $(\mathbb{K},+)$ et $\bullet$ est distributive sur $+$	1
$\mathcal{E}$	un $\mathbb{K}-$espace vectoriel est un groupe additif $(\mathcal{E},\oplus)$ muni d'une loi externe $\odot$ sur un corps $\mathbb{K}$ appelé scalaire	14
$\mathbb{R}^m$	l'espace euclidien $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{\text{m fois}}$ muni de la norme euclidienne $\left\Vert (x_i)_{1\leq i\leq m}\right\Vert_{\mathbb{R}^m}=\left(\sum\limits_{1\leq i\leq m}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $(x_i)_{1\leq i\leq m}\in\mathbb{R}^m$	14
$\frac{dy}{dx}$	La fonction vectorielle $y(x)\in\mathcal{E}$ admet une dérivée en $x=x_0\in\mathbb{K}$, si le rapport $\frac{1}{x-x_0}(y(x)-y(x_0))$ tend vers un vecteur limite lorsque x tend vers x_0. $\frac{dy}{dx}$ est appellée notation de Leibniz $y'(x)$ est appellée notation de Lagrange $\overset{\bullet}{y}(x)$ est appellée notation d'Isaac Newton $D_x y$ est appellée notation d'Euler	14
$y^{(k)}(x)$	On note $\frac{d^k y}{dx^k}$ par $y^{(k)}(x)$, tel que $y^{(k+1)}(x)=\left(y^{(k)}(x)\right)'$	1
M	Matrice $M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ à m lignes et n colonnes la Matrive Dérivée (Jacobien) de $Y=(y_i)^T_{1\leq i\leq n}$ est $DY\left((x)_{1\leq i\leq n}\right)=\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n,\\1\leq j\leq n}}$	34
$\mathcal{L}$	Transformée de Laplace $F(p)=\mathcal{L}[f](p)=\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$ $\mathcal{L}[f']=p\mathcal{L}[f]-f(0)$ $\mathcal{L}[f'']=p^2\mathcal{L}[f]-pf(0)-f'(0)$ $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right]=p^n\mathcal{L}[f]-\sum\limits_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{1}{p}\mathcal{L}[f](p)$	17
$\mathcal{L}^{-1}$	Transformée inverse de Laplace $f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{px}F(p)\,dp$	16
∂	dérivée partielle $\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial x^j}=f'_{jyix}=\partial_{jyix}f$ $\frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}(a)=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$	20

0.1 Introduction

Le calcul infinitésimal (différentiel) a tout naturellement conduit les scientifiques à énoncer certaines lois de la physique en termes de relations entre, d'une part, des variables dépendantes d'une autre variable indépendante (en général le temps) et, d'autre part, leurs dérivées : il s'agit là d'équations différentielles ordinaires (en abrégé, EDO). L'un des précurseurs dans ce domaine fut Isaac Newton (1642-1727). Dès lors, de nombreux modèles de la physique ont étés énoncés par l'intermédiaire d'EDO (dont, au XVIIe siècle, les équations d'Euler-Lagrange pour les sytèmes mécaniques). Nous donnons ci-dessous une liste non exhaustive de modèles par des EDO tirés de divers domaines des sciences : Biologie, Chimie, Electricité, Electronique, Electrotechnique, Mécanique....

Définition 0.1. [08]

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}$. La forme la plus générale d'une équation différentielle ordinaire (en abrégé ´EDO) est

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = 0,\ k \geq 1, \tag{1}$$

telle que $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$, et $F : \mathbb{R} \times \mathcal{E}^{k+1} \longrightarrow \mathcal{E}$, est une fonction suffisamment régulière. L'ordre de l'EDO est l'entier k correspondant à la dérivée d'ordre le plus élevé dans (1) et se dégré est la puissance correspondant à la dérivée d'ordre le plus élevé.

Remarque 0.1. i) Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, alors (1) est dite EDO scalaire

ii) Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, alors (1) est dite EDO vectorielle. On parle alors de système différentiel.

iii) Le théorème de la fonction implicite garantit que l'EDO (1) peut se mettre (localement) sous forme explicite normale (résolue).

$$\frac{d^k y}{dx^k} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{k-1} y}{dx^k}\right),$$

à condition que $\det(J_F) \neq 0$, où J_F est la matrice jacobienne de F c-à-d la matrice constituée des éléments

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \left(\dfrac{d^k y_j}{dx^k}\right)}, (i, j) \in \{1, \ldots m\}^2.$$

iv) Dans le cas où la matrice Jacobienne est partout singulière, l'EDO (1) sous forme implicite est dite Equation Différentielle Algébrique (EDA).

Exemple 0.1. [08]

L'EDO (Forme implicite)

$$\left(1-x^2\right)y'+xy+1=0,$$

admet pour forme résolue : $y'=\dfrac{xy+1}{x^2-1}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.

On trouve des solutions sur chacun des trois intervalles mais la seule solution C^1 (continue, dérivable et de dérivée continue) est $y=-x$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Définition 0.2. Soit l'EDO scalaire

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0,$$

une fonction $u:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est appellée solution ou **courbe intégrale** de F, si u est n fois différentiables sur I, et

$$F\left(x,u,u',\ldots,u^{(n)}\right)=0,\ \forall x\in I.$$

Une soution générale du $n^{\text{ème}}$ ordre est une solution contenant n variables arbitraitres, corréspandantes à n constantes d'intégration.

Une solution particulière est dérivée de la solution générale en remplaçant les constantes par des valeurs particlières, souvent choisies par rapport aux conditions initiales ou conditions aux bornes.

Une solution singulière est une solution qui ne peut être dérivée de la solution générale.

La constréction d'une équation differetièlle (élimination des constantes) étant donné une fammille de courbes, en éliminant les constantes.

Exemple 0.2. 1) montrer que $y(x)=c\ \cos(x)$ est une solution de l'equation $y''+y=0$ telle que c est une constante.

2) trouver l'equation differetielle de solution générale $y=c\ \sin x$.

3) Former l'equation differetielle de solution générale $y=C_1\left(x-C_2\right)^2$

Solution : 1) on a $y''(x)=-c\sin(x)$, alors $y''(x)+y(x)=-c\sin(x)+c\ \sin x=0$

2) En dérivant l'équation, on a $y'=c\cos(x)$ en dévisant $\frac{y'}{y}=\cot x$

3) En dérivant deux fois $y=C_1\left(x-C_2\right)^2$, on a $y'=2C_1\left(x-C_2\right)$ et $y''=2C_1$, on a $\frac{(y')^2}{y}=2C_1=y''$, donc on obtient l'équation cherchée $\dfrac{(y')^2}{y}=4C_1=2y''$.

CHAPITRE 1

Résultats fondamentaux,Equations diférentielles du premier ordre

1.1 Existence et unicité des solutions pour les Problèmes de Cauchy

Dans cette section on va étudier l'existence et l'unicité des solutions des EDO en présentant le problème de Cauchy et des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions globales.

1.1.1 Problème de Cauchy

Définition 1.1. [06]

Soit $\mathcal{E}$, un espace vectoriel , et soit la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$

Résoudre un Problème de Cauchy, c'est trouver toutes les fonctions $y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & y(x) \end{array} \right.$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} = y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. , \text{ où } x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathcal{E} \tag{1.1}$$

1.1.2 Solutions du Problème de Cauchy

Soient $\mathcal{E} = \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$, $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, une application continue

Définition 1.2. [06]

Une solution de (1.1) est une fonction dérivable $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, telle que :

1. $\forall x \in I$, $(x, y(x)) \in U$.
2. $\forall x \in I$, $y'(x) = f(x, y(x))$, $x_0 \in I$, $(x_0, y_0) \in U$

1.1.3 Solutions maximales

Définition 1.3. [10]

Soient $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ des solutions de (1.1).
On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\forall x \in I$, $\tilde{y}(x) = y(x)$.
On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ est maximale si, y n'admete pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ avec $I \subseteq \tilde{I}$.

Théorème 1.1. *[10]*

Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).

1.1.4 Solutions globales

Soit l'ouvert U, de la forme $U = J \times U'$ où J est un intervallede $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.4. [10]

Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Remarque 1.1. Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse

Exemple 1.1. [10]

Soit $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cherchons les solutions de cette équation, nous avons la solution globale $y(x) = 0$.

Si y ne s'annule pas, alors $\dfrac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration $-\dfrac{1}{y(x)} = x + c \Rightarrow y(x) = \dfrac{-1}{x+c}$.
Cette formule définit deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -c[$ et $]-c, +\infty[$.

Ces solutions sont maximales, mais pas globales. En fait $y(x) = 0$ est la seule solution globale.

1.1.5 Régularité des solutions

Définition 1.5. [05]

Une fonction est dite de classe C^k, si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 1.2. *[05]*

Si $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^k, alors toute solution de (1.1) est de classe C^{k+1}.

1.2 Théorèmes d'existence et unicité

Lemme 1.1. *[10]*

On dit que $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy (1.1) si et seulement si

1. *y est continue pour tout $x \in I$, $(x, y(x)) \in U$.*
2. *Pour tout $x \in I$, on a*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Définition 1.6. [10]

On dit que f est localement lipschitzienne en y, si pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe un cylindre $C = [x_0 - x, x_0 + x] \times B(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(x_0, y_0) \geq 0$, tel que f soit $k-$ lipschitzienne en y sur C.

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in C, \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Remarque 1.2. [03]

Pour que f soit localement Lipchitzienne par rapport à y il suffit que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et soit continue

Théorème 1.3. *[12]*

Si f est localement lipchitzienne par rapport à y, alors le problème de Cauchy (1.1) admet une solution unique.

Preuve

On va donner la preuve, pour $m = 1$, et on peut ainsi facilement la generaliser au cas général.

Si $f \in C([a, b])$ et si f vérifie la condition (dite de Lipschitz),

$$\forall x \in [a, b],\ \forall y \in \mathcal{C}([a, b]),\ \forall z \in C([a, b]), \exists L > 0;\ |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq L|y(x) - z(x)|,$$

alors, le Problème de Cauchy admet une solution et une seule sur $[a, b]$ (et ceci pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$).

Existence (itérations de Picard)

On définit la suite de fonctions (y_k) telle que

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y_k(t))dt. \end{cases}$$

Par définition, $y_k \in C^\infty([a, b])$. Ainsi,

$$\forall x \in [a, b],\ y_{k+1}(x) - y_k(x) = \int_a^x f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))dt.$$

Où, f vérifie une condition de Lipschitz, d'où

$$\forall x \in [a, b],\ |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq L \int_a^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)|dt \leq L||y_k - y_{k-1}||_\infty |x - a|.$$

Puis, par récurrence,

$$\forall x \in [a, b],\ |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq L^k ||y_1 - y_0||_\infty \frac{|x - a|^k}{k!} \leq L^k ||y_1 - y_0||_\infty \frac{|b - a|^k}{k!}$$

Ensuite, comme $(k + i)! \geq k!i!$,

$$\forall x \in [a, b],\ |y_{k+p}(x) - y_k(x)| \leq L^k \frac{|b - a|^k}{k!} ||y_1 - y_0||_\infty \sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{|b - a|^i}{i!}.$$

Où, $\sum_{i=0}^{p-1} L^i \frac{|b-a|^i}{i!} \leq e^{L|b-a|}$, donc

$$\forall x \in [a,b], |y_{k+p}(x) - y_k(x)| \leq L^k \frac{|b-a|^k}{k!} ||y_1 - y_0||_\infty e^{L|b-a|}.$$

Il s'ensuit que (y_k) est de Cauchy dans $C^\infty([a,b])$, donc (y_k) converge uniformément vers y de $C^\infty([a,b])$. De plus, la limite y satisfait $\forall x \in [a,b], y(x) = y_0 + \int_a^x f(t,y(t))dt$.

Unicité

Si le problème de Cauchy admet une solution y, cette solution vérifie que

$$\forall x \in [a,b],\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t,y(t))dt.$$

Supposons qu'il existe deux solutions y et z à ce même problème de Cauchy. donc

$\forall x \in [a,b],\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t,y(t))dt$ et $\forall x \in [a,b], z(x) = y_0 + \int_a^x f(t,z(t))dt$, nous obtenons facilement,

$\forall x \in [a,b],\ y(x) - z(x) = \int_a^x f(t,y(t)) - f(t,z(t))dt$. Où f vérifie une condition de Lipschitz, d'où

$\forall x \in [a,b],\ |y(x) - z(x)| \leq L \int_a^x |y(t) - z(t)|dt \leq L||y-z||_\infty |x-a|$,

où $||\omega||_\infty = sup_{x\in[a,b]}|\omega(x)|$,pour $\omega \in \mathcal{C}([a,b])$. Ainsi, par récurrence,

$$\forall x \in [a,b], |y(x) - z(x)| \leq L^n ||y-z||_\infty \frac{|x-a|^n}{n!}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\forall x \in [a,b],\ |y(x) - z(x)| \leq 0$, puis $y = z$.

Exemple 1.2. [05]

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases},\ \text{où}\ \left|\ \begin{array}{lcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^{\frac{1}{3}} \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Les solutions générales de (1.2) sont : $y(x) = \epsilon \left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{\frac{3}{2}}$, $\epsilon = \pm 1$ et la fonction identiquement nulle.

1^{er}cas : $y_0 \neq 0$

La fonction f est alors de classe C^1 sur un voisinage de (x_0, y_0) et le Théorème de Cauchy nous assure l'existence et l'unicité d'une solution sur un voisinage de (x_0, y_0).

En effet la résolution du Problème de Cauchy fixe la valeur de ϵ en fonction du signe de y_0. Mais si l'on cherche une solution définie sur $\mathbb{R}$, on trouve une infinité de fonctions par raccordement des différentes courbes en $y_0 = 0$

2^{eme} cas : $y_0 = 0$

La fonction f n'est pas dérivable sur un voisinage de y_0 et le Théorème de Cauchy ne s'applique pas.

On peut trouver trois fonctions solutions :

$$\begin{cases} y_1(x) & = & 0 \\ y_2(x) & = & \left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{\frac{3}{2}} \\ y_3(x) & = & -\left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

1.2.1 Condition suffisante d'existence des solutions globales

Théorème 1.4. *[10]*

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^m$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in J$ fixé , l'application $y \to f(x, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(y)$ sur $\mathbb{R}$. Alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ est globale (i.e., définie sur J tout entier).

Exemple 1.3. [10]

Soit l'equation suivante :

$$y' = x\sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y) \tag{1.3}$$

On montre que toute solution maximale de (1.3) est globale.

On a $f(x, y)$ definie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$,

et $\forall y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| x\sqrt{x^2 + y_1^2} - x\sqrt{x^2 + y_2^2} \right| \\ &= |x| \left| \sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2} \right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} |y_1| \leq \sqrt{x^2+y_1^2} \\ \\ |y_2| \leq \sqrt{x^2+y_2^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |y_1+y_2| \leq |y_1|+|y_2| \leq \sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{x^2+y_2^2} \Rightarrow \frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{x^2+y_2^2}} \leq 1$$

donc :

$$\begin{aligned} |f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= |x| \frac{(x^2+y_1^2)-(x^2+y_2^2)}{\sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{x^2+y_2^2}} \\ &= |x| \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{\sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{x^2+y_2^2}} \leq |x| |y_1-y_2| \leq Q(x) |y_1-y_2|, \end{aligned}$$

telle que $Q(x)=|x|$ .La fonction $Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'apres Théorème 1.4 toute solution maximale de (1.3) est une solution globale.

CHAPITRE 2

Résolution explicite exacte de certaines EDO

2.8.3 Cas où on peut abaisser l'ordre

Dans ce Chapitre on donne une etude qualitative des EDO en présentant d'abord des méthodes graphiques de résolution, utilisant les isoclines et le champ des vecteurs tangents aux courbes de solutions, après on présente les EDO solvables explicitement, telles que les EDO à variables séparables, homogènes, exactes (Facteurs intégrants) , de Bernoulli, de Lagrange, de Riccatti, de Clairaut...

Enfin on présente les méthodes utilisant les Series de Taylor et les transformations de Laplace

2.1 Interprétation géométrique d'une équation différentiellee

Définition 2.1. [06]

Considérons une famille de courbes dépendant d'un **paramètre** c, d'équation

$$F\left(x, y, c\right) = 0. \tag{2.1}$$

À chaque valeur de c correspond une courbe de la famille. La fonction F admettant des dérivées partielles par rapport à x et à y. Dérivons par rapport à x l'équation 2.1 sachant que y est aussi une fonction de x. On obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.2}$$

L'élimination du paramètre c entre les équations 2.1 et 2.2 conduit à une relation

$$R\left(x, y, y'\right) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qui est l'équation différentielle de la famille de courbes donnée par 2.1. Etant donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre, toutes ces courbes sont des courbes intégrales d'une même équation différentielle sous les hypothèses précédentes. Réciptoquement la résolution d'une équation différentielle du premier ordre fournit une famille de courbes dépendant d'un paramètre.

Remarque 2.1. [06]

d'une maniére générale les coubes (C) définies par l'équation comportant n paramétres

$$F\left(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) = 0 \tag{2.3}$$

vérifient une équation différentielle du $n^{ème}$ ordre

$$G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

obtenue en éliminant les n paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entre l'équation 2.3 ci dessus et les n équations obtenues en la dérivant n fois par rapport à t.

2.1.1 isoclines

Définition 2.2. [06]

on appelle isocline de pente m pour la famille des courbes solutions de l'équation

$$y' = f(x, y)$$

La linge (L) croiseé en chacun de ses points par une courbe intégrale de pente égale a m.

Les isoclines permettent de définir l'allure des courbes intégrales dans le plan.

Elle sont définies par l'équation $f(x, y) = m$, où m est un paramètre.

L'isocline de pente zéro est le lieu des points de pente nulle ,qui contient

les points extrémums des courbes solutions (Voir Figure 3.1 et Figure 3.2)

2.1.2 Représentation graphique des solutions

Résoudre une équation différentielle $y' = f(x, y)$, c'est déterminer explicitement $(y = \varphi(x, c))$ ou implicitement $(\Phi(x, y, c) = 0)$, une famille de courbes ayant leur tangentes données et résoudre un problème $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, c'est déterminer celle de ces courbes qui passe par un point donné. On peut donc visualiser le problème en traçant le champ de vecteurs associé à l'équation

Exemple 2.1. [02]

L'EDO $y' = -\dfrac{x}{y}$ peut se résoudre par séparation des variables :

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$;
2. $\displaystyle\int ydy = -\int xdx$;
3. $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C$ donne

$x^2 + y^2 = 2C = r^2$.

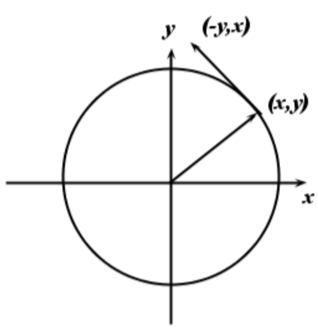

figure 3.3

La solution $y(x)$ se situe donc sur un cercle de rayon r.

Exemple 2.2.

Résolvons l'EDO $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$. Cette équation est homogène, puisque $\dfrac{(\alpha y)^2 - (\alpha x)^2}{2(\alpha x)(\alpha y)} = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, $\forall \alpha \neq 0$.

On pose donc $u(x) = y(x)/x$, c.-à-d. $y(x) = x.u(x)$ et on obtient

– Les courbes $\left(1 + u(x)^2\right).x = C$,
où C est une constante réelle non nulle;
– Les courbes $\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y(x)^2 = \frac{C^2}{4}$
(famille de cercles qui passent par l'origine
et qui sont tangents à l'axe des y.)

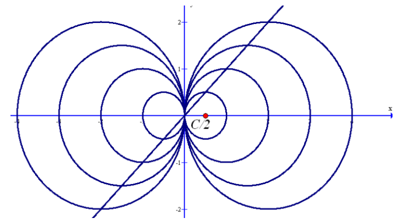

figure 3.4

Définition 2.3. [02]

Si on dessine en tout point (x, y) du domaine de définition de la onction $f(x, y)$ un petit segment de pente $f(x, y)$, on obtient le champ de directions de l'EDO $y' = f(x, y)$

Proposition 2.1. *[02]*

Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$. Alors le graphe de f est tangent en chacun de ses points (x, y) au vecteur $V_{x,y}$.

Théorème 2.1. *[02]*

Dans un point (x, y) on a une solution courbe d'une equation différentielle de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. La courbe a une tangente $f(x, y)$. On represente la solution sous forme de graphe par le champs des vecteurs donnant des segments tangents le graphe de $f(x, y)$ aux points (x, y). Le champ des vecteurs est donné par la fonction vecteur suivante

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\left\|\left(1, \frac{dy}{dx}\right)\right\|}, \frac{\frac{dy}{dx}}{\left\|\left(1, \frac{dy}{dx}\right)\right\|}\right),$$

qui associe à chaque point (x, y) un vecteur unité de longueur 1 et comme direction sa dérivée.

Exemple 2.3. [02]

Le champ de direction de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

est le vecteur à deux dimension

$$F(x, y)\left(= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + |y^2 - x^2|^2\right)}}, \frac{y^2 - t^2}{\sqrt{\left(1 + |y^2 - x^2|^2\right)}}\right)$$

Plusieures solutions courbes sont données par le graphe suivant

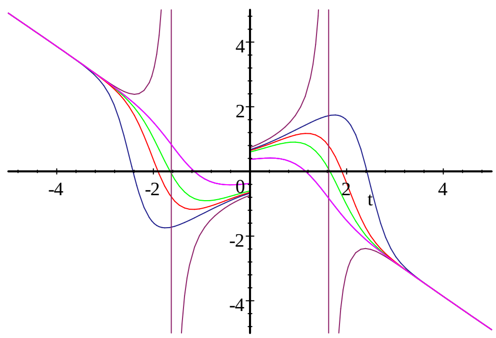

Figure 3.5

2.2 Equations à variables séparées

Il s'agit d'équation du type :

$$y' = G\left(x, y\right) \text{ avec } G\left(x, y\right) = A\left(x\right) B\left(y\right).$$

Dans ce cas

$$\frac{dy}{B\left(y\right)} = A\left(x\right) dx.$$

Il faut ensuite intégrer chaque membre

$$\int \frac{dy}{B\left(y\right)} = \int A\left(x\right) dx.$$

Exemple 2.4. [06]
$\left(1 + x^2\right) y' = 1 + y$avec $1 + x^2 > 0$, donc : $\dfrac{y'}{1 + y^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}$, et en intégrant

$$\arctan\left(y\right) = \arctan\left(x\right) + C,$$

donc

$$y = \tan\left(\arctan\left(x\right) + C\right)$$

Exemple 2.5. Intégrer l'équation $y' = -\dfrac{y}{x}$, métons l'équation sous la forme $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, d'où en séparant les variables, on a

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ et par conséquant,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

donc $y = \frac{C}{x}$ où $C = \pm C_1$. On peut perdre la solution $y = 0$ quand on dévise par y; mais cette solution est contenue dans l'équation originale pou $C = 0$.

2.3 Equations homogènes

Il s'agit des équations du type :

$$y' = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou bien sou la forme

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

telles que P, Q sont des fonctions homogènes. Sachant que $f(x, y)$ est homogène si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Méthode de résolution : On effectue un changement des variables $y = xu$, alors $y' = u + xu' = g(u)$. On est revenu à une équation à variables séparées :

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Exemple 2.6. [01]

$$xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$$

Cette équation est sous forme résolue sur $]-\infty; 0[$ou $]0; +\infty[$.

On pose

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow xu' + e^u = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$e^{-u}du = \frac{-1}{x}dx \Rightarrow e^{-u} = \ln(|x|) + C,$$

où C est une constante

On doit donc avoir $\ln(|x|) + C > 0$ et $u = -\ln(\ln(|x|) + C)$, puis $y = -x\ln(\ln(|x|) + C)$.

Exemple 2.7. trouver la solution générale de l'équation

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

2.3.1 Equations se ramenant à des équations homogènes

Si
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{2.4}$$

On pose $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

1) Si $\delta \neq 0$, en faisant alors dans l'equation 2.4 $x = u + \alpha, y = v + \beta$, où les paramètres αet β sont déterminées par le système d'equations $a_1\alpha + b_2\beta + c_1 = 0, a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$, on se ramène alors à une équation différentielle par rapport à les variables u et v.

2) Si $\delta = 0$, en faisant dans l'equation 2.4 $a_1x + b_2y + c_1 = u$, on se ramène alors à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 2.8. Intégrer l'équation $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$.

On a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 4}{x - 2y + 5}$ et $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, donc en faisant le changemant $x = u + \alpha, y = v + \beta$ avec αet β sont déterminées par le système d'equations $2\alpha - \beta + 4 = 0, \alpha - 2\beta + 5 = 0$, on obtient $\alpha = -1, \beta = 2$, donc $x = u - 1, y = v + 2 \Rightarrow dx = du, dy = dv \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \dfrac{2u - v}{u - 2v}$ est une équation homogène par rapport à $u$et v.

2.4 EDO Linéaires Scalaires

Définition 2.4. [05]

Soit l'équation différentielle scalaire suivante :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2.5}$$

On dit que l'équation (2.5) est linéaire, si elle peut s'écrire sous la forme :

$a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)\,y^{(0)}(x) - b(x) = 0,$

où a_i, b_i et $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, sont des fonctions par rapport à x, tel que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.4.1 EDO Linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre

Théorème 2.2. *[11]*

Soit $y_p(x)$ une solution particuliére de l'équation non homogéne

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x), \tag{2.6}$$

$y(x)$ est solution générale de l'équation différentielle précédente si et seulement si l'on a

$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$,où $y_h(x)$ est solution de l'équation homogène

$$y'(x) = a(x)\, y(x)\,. \tag{2.7}$$

Preuve

On a $y_p'(x) + y_h'(x) = a(x)\, y_p(x) + b(x) + a(x)\, y_h(x) = a(x)\,(y_p(x) + y_h(x)) + b(x)$,

et réciproquement, si $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ est solution de l'équation (2.6), alors

$y'(x) - y_p'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) - a(x)\, y_p(x) - b(x) = a(x)\,(y(x) - y_p(x))$,

qui est donc bien une solution de l'équation homogène (2.7).

Si on cherche la solution avec pour condition initiale $c(0) = y(0)$, l'équation homogène corréspoandante est à variables séparables : $\dfrac{dy}{y} = a(x)dx$, et on en déduit que la solution générale de l'équation homogéne est donnée par :

$$y_h(x) = y_0 e^{\int_0^x a(t)dt}$$

Une façon élémentaire pour obtenir la solution de l'équation inhomogéne consiste à utiliser la méthode dite de la variation de la constante. Autrement dit, on cherche la solution sous la forme :

$$y(x) = c(x)\, e^{\int_0^x a(t)dt}.$$

En dérivant, on obtient

$$y'(x) = c'(x)\, e^{\int_0^x a(t)dt} + c(x)\, a(t)\, e^{\int_0^x a(t)dt}.$$

Par ailleurs :

$$y'(x) = a(x)\, y + b(x)\,,$$

et la fonction $x \to c(x)$ est déterminée par l'équation différentielle

$$c'(x) = b(x)\, e^{-\int_0^x a(t)dt},$$

avec la condition initiale $c(0) = y_0$.

Exemple 2.9. [03]

Soit à résoudre :

$$xy'(x) - y(x) = x^2 e^x,$$

sur $]0,+\infty[$.

1. On résout l'équation homogène, dont la solution générale est donnée par $y(x) = c.x$.
2. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = z(x)x$, d'où :

$$xz(x) + x^2z'(x) - xz(x) = x^2e^x \Leftrightarrow z'(x) = e^x$$

3. On en déduit que $z(x) = e^x + \lambda$, et donc

$$y(x) = \lambda x + xe^x.$$

Remarque 2.2. Il y a d'autre méthode pour résoudre l'EDO 2.6 comme suitm : on applique la sibstution

$$y = uv \text{ avec } u \text{ et } v \text{ sont des fonctions de } x,$$

donc

$$y' = u'v + v'u\ ,$$

alors l'EDO 2.6 prend la forme

$$(u' - a(x)u)v + v'u = b(x)\,. \tag{2.8}$$

Pour résoudre cette équation, on exige que

$$(u' - a(x)u) = 0, \tag{2.9}$$

en déduit u ensuite de l'équation 2.8 on trouve v et par conséquent de 2.8 on obtient y.

Exemple 2.10.

$$y' = \frac{y}{x} + x. \tag{2.10}$$

Est une EDO du premier ordre linéaire tqs $a(x) = \dfrac{1}{x}$ et $b(x) = x$. On pose $y = uv$, donc

$$2.10 \Longleftrightarrow \left(u' - \frac{1}{x}u\right)v + v'u = x,$$

alors on exige

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \Rightarrow u = x.$$

En remplaant dans 2.10, on a

$$v'x = x \Rightarrow v' = 1 \Rightarrow v = x + c,$$

donc

$$y = uv = x\,(x + c)\,.$$

2.4.2 Equations de Bernoulli

Il s'agit d'équations de la forme :

$$y'\,(x) = a\,(x)\,y\,(x) + b\,(x)\,y^{\alpha}\,(x)\,,\ \ \alpha > 0, \tag{2.11}$$

on peut ecrire l'équation a la forme :

$$y'\,(x)\,y^{-\alpha}\,(x) = a\,(x)\,y\,(x) + b\,(x)\,,$$

On pose

$$z\,(x) = y^{1-\alpha}\,(x) \Rightarrow z'\,(x) = (1-\alpha)\,y'\,(x)\,y^{-\alpha}\,(x)\,,$$

alors

$$\frac{z'\,(x)}{1-\alpha} = y'\,(x)\,y^{1-\alpha}\,(x)\,,$$

donc on remplace dans l'équation 2.11, on trouve

$$\frac{z'\,(x)}{1-\alpha} = a\,(x)\,z\,(x) + b\,(x)\,,$$

qui est une équation différentielle ordinaire Linéaire du premier ordre nous savons à résoudre.

Remarque 2.3. 1. Si $\alpha = 0$ l'équation 2.11 devient une équation linéaire avec second mombre

$$y'\,(x) - a\,(x)\,y\,(x) = b\,(x)\,,\ \ \alpha > 0. \tag{2.12}$$

2. Si $\alpha = 1$ l'équation 2.11 devient une équation linéaire sans second mombre

$$y'\,(x)\,(b\,(x) - a\,(x))\,y\,(x) = 0. \tag{2.13}$$

3. On peut utiliser directement le changement $y = uv$ come dans la remarque 2.2.

Exemple 2.11. Soit l equation diférentielle

$$y' + 2xy = y^2 e^x. \tag{2.14}$$

On dévise l'équation sur y^2, on trouve

$$y^{-2}y' + 2xy^{-1} = e^x. \tag{2.15}$$

On fait changement de variable $z = y^{-1}$, donc $z' = -y^{-2}y'$. En remplaçant dans 2.15, on obtient

$$z' - 2xz = -e^x. \tag{2.16}$$

Est une équation linéaire du premier ordre avec secand membre nous savons à résoudre.

2.4.3 Equations de Riccatti

L'Equation de Riccati s'ecrit sous la forme

$$y'(x) = a(x)\, y^2(x) + b(x)\, y(x) + c(x)\,. \tag{2.17}$$

Soit $y_p(x)$ solution particulière de (2.17),
on pose $y(x) = y_p(x) + z(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_p'(x) + z'(x) \\ &= a(x)\,(y_p(x) + z(x))^2 + (y_p(x) + z(x))\, b(x) + c(x)\,, \end{aligned}$$

donc

$$y_p'(x) + z'(x) = a(x)\, y_p^2(x) + b(x)\, y(x) + c(x) + 2a(x)\, y_p(x)\, z(x) + a(x)\, z^2(x) + b(x)\, z(x)\,,$$

d'où

$$z'(x) = (2a(x)\, y_p(x) + b(x))\, z(x) + a(x)\, z^2(x)\,,$$

est une éqaution de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

Exemple 2.12. Soit l'équation

$$2x^2y' = (x-1)\left(x^2 - y^2\right) + 2xy \tag{2.18}$$

telle que $y_p = x$ est une solution particulière. Cette équation est de Ricatti se transforme à

$$y' = \frac{(1-x)}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y + (x-1) \tag{2.19}$$

telle que $a(x) = \dfrac{(1-x)}{2x^2}$, $b(x) = \dfrac{1}{x}$ et $c(x) = (x-1)$, alors on pose $y = y_p + z(x) = x + z(x) \Rightarrow y' = 1 + z'(x)$ en remplaçant dans 2.19 on a

$$z'(x) = \left(2\frac{(1-x)}{2x^2}x + \frac{1}{x}\right)z(x) + \frac{1}{x}z^2(x),$$

est une équation de Bernoulli nous savons à résoudre.

Proposition 2.2. *On peut transformer toute équation différentielle de type de* ***Riccati****, à une équation* ***linéaire****.*

Démonstration. Soit l'équation de Riccati $(\mathcal{R})$. Après la connaissance d'une solution particulière y_p de cette équation, faisant les transformations suivantes : □

- Substituons le changement de variable :

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}, \text{ alors } y' = y_p'(x) - \frac{z'}{z^2} \tag{2.20}$$

- On a, alors :

$$y_p'(x) - \frac{z'}{z^2} = a(x)\left[y_p(x) + \frac{1}{z(x)}\right] + b(x)\left[y_p(x) + \frac{1}{z(x)}\right]^2 + c(x)$$

- Finalement, (apprès la multiplication par z^2) on trouve :

$$z' + [2b(x)y_p(x) + a(x)]z = -b(x) \tag{2.21}$$

Ce qui est une équation **linéaire**.

Exemple 2.13. Soit

$$y' + 3y + y^2 + 2 = 0 \tag{2.22}$$

est de Ricatti et on remarque que $y_p = -1$ est solution particulière de 2.22. Pour trouver sa solution on fait le changement $y(x) = y_p(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ en trouvant

$$z' - z = 1. \tag{2.23}$$

Est une équation différentielle linéaire du premier ordre solution est

$$z = Ke^x - 1, K \in \mathbb{R}.$$

Cela nous donne la solution générale de 2.22 comme suit

$$y = -1 + \frac{1}{Ke^x - 1}, K \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.3. *Etant donner une equation de de **Riccatti** de la forme :*

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2},$$

avec a, b et c sont des constante avec $a \neq 0$.Si , de plus, on a : $(b+1)^2 - 4ac \geq 0$, alors cette équation admet une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda_1 = \dfrac{-(b+1) - \sqrt{(b+1)^2 - 4ac}}{2a}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 - 4ac}}{2a}$.

Remarque 2.4. Il n'est pas toujours facile de trouver une solution particulière d'une équation de **Riccatti**.

Proposition 2.4. *Etant donner une équation de de Riccati de la forme*

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{A}{x}y^2 + C,$$

où $A; B$ et C sont des constantes. Alors, cette équation devient une équation a variable séparable par la substitution de la fonction suivante $y = z\sqrt{x}$.

Démonstration. On remarque que :$y' - \dfrac{1}{2x}y = z'\sqrt{x}$

Donc, on a : $z'\sqrt{x} = Az^2 + C$

Ce qui est une équation à variable séparable □

2.5 Equations aux différentielles totales (exactes)

Il s'agit d'équations de la forme :

$$P\,(x,y)\,dx+Q\,(x,y)\,dy=0,\text{ avec }\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Dans ce cas il existe une fonction $F(x,y)$ telle que $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x}=P\end{cases}$

L'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme :

$$P\,(x,y)\,dx+Q\,(x,y)\,dy=dF=0$$

Soit, $F(x,y(x))=$ Constante. C'est à partir de cette dernière équation que l'on détermine $y(x)$.

Remarque 2.5. Si $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$, (ou constante), l'équation est à variables séparées. En effet, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$ implique que P ne dépend pas de x mais seulement de y. De même, Q ne dépendra pas de y mais que de x. L'équation différentielle devient $P(x)dx=-Q(y)dy$.

Exemple 2.14. [03]

$y^2-x^2+2xyy'=0\Rightarrow\left(y^2-x^2\right)dx+2xydy=0.$

$$\begin{cases}p\,(x,y)=y^2-x^2\\[2ex]Q\,(x,y)=2xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial y}=2y\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y\end{cases}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\exists F\,(x,y)\,,\text{ telle que }\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=p\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q,\end{cases}$$

donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}=y^2-x^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2xy$, donc $F\,(x,y)=xy^2+\phi\,(x)\,.$

On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}=y^2-x^2=y^2+\phi'\,(x)\Rightarrow\phi\,(x)=-\frac{1}{3}x^3+\lambda$ tq $\lambda\in\mathbb{R}$, donc $F\,(x,y)=xy^2-\frac{1}{3}x^3+\lambda$

$\left(y^2-x^2\right)dx+2xydy=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy=0\Leftrightarrow dF=0\Leftrightarrow F=k\,;$ tq $k\in\mathbb{R}$,

donc $F\,(x,y)=xy^2-\dfrac{1}{3}x^3+\lambda=k\Rightarrow xy^2-\dfrac{1}{3}x^3=k'y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{k'}{x}}.$

2.5.1 Facteurs integrants

Soit

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{2.24}$$

et supposons que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Définition 2.5. [03]

On dit que λ est un facteur integant de (2.24) sil existe une fonction F tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \lambda P \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda Q. \end{cases}$$

Exemple 2.15. [03]

$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \Rightarrow$

$$\left(y^2 - x^2\right) dx - 2xydy = 0 \tag{2.25}$$

on vérifie que $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ est un facteur integant de (2.25)

$$\begin{cases} p(x,y) = y^2 - x^2 \\ \\ Q(x,y) = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 2y \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

donc (2.25) n'est pas différentelle totale.

Soit

$$\begin{cases} \lambda P = \frac{y^2-x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2} = P_1 \\ \\ \lambda Q = \frac{-2xy}{\left(y^2+x^2\right)^2} = Q_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial y} &= \frac{2y\left(y^2+x^2\right)^2 - \left(y^2-x^2\right)4y\left(y^2+x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^4} = \frac{6x^2y-2y^3}{\left(y^2+x^2\right)^3} \\ &\text{et} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= \frac{-2y\left(y^2+x^2\right)^2 + 2xy\left(4y\right)\left(y^2+x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^4} = \frac{6x^2y-2y^3}{\left(y^2+x^2\right)^3} \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$, donc $\lambda(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ est un facteure integant de (2.25).

2.6 Equations de Lagrange et de Clairant

2.6.1 Equations de Lagrange

Il s'agit d'équations de la forme :

$$y = a(y')\,x + b(y') \tag{2.26}$$

où a, b sontt des fonctions au moins de classe C^1.

Méthode de résolution : On pose $y' = p$. Cela transforme l'équation 2.26 en

$$y = a(p)\,x + b(p)\,. \tag{2.27}$$

En dérivant par rapport à x l'équation 2.27 on obtient :

$$\begin{aligned} y' = p &= a(p) + xp'a'(p) + p'b(p) \\ &= a(p) + p'\left(xa'(p) + b(p)\right); \end{aligned}$$

autrement dit

$$p - a(p) = p'\left(xa'(p) + b(p)\right).$$

Il y a deux cas :

i) Si $p - a(p) = 0$, et ses racines sont $p_1, p_2, \ldots, p_k$, alors

$$y_i = a(p_i)\,x + b(p_i) \ \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

Sont des solutions de 2.26.

Si $p - a(p) \neq 0 \Rightarrow a(p) \neq p$, alors

$$\begin{cases} y = a(p)\,x + b(p) \\ y' = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = a'(p)\,xdp + a(p)\,dx + b'(p)\,dp \\ dy = pdx \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$a'(p)\,xdp + a(p)\,dx + b'(p)\,dp = pdx$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(a'\left(p\right)x+b\left(p\right)\right)dp=\left(p-a\left(p\right)\right)dx$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{a\left(p\right)'}{p-a\left(p\right)}x+\frac{b'\left(p\right)}{p-a\left(p\right)}.$$

Par suit :

$$\frac{dx}{dp}-\frac{a\left(p\right)'}{p-a\left(p\right)}x=\frac{b'\left(p\right)}{p-a\left(p\right)}.$$

Cette équation admet une solution $x=g\left(p,C\right)$. Il en résulte que la solution générale de 2.26 est de la forme :

$$\begin{cases} y &= a\left(p\right)x+b\left(p\right), \\ x &= g\left(p,C\right). \end{cases}$$

Cette solution peut se ramener sous forme implicite $F\left(x,y,C\right)=0$

Exemple 2.16. [01]
Soit l'équation de Lagrange

$$2y-x\left(y'+\left(y'\right)^3\right)+\left(y'\right)^2=0$$

$$\Rightarrow$$

$$y=\frac{y'+\left(y'\right)^3}{2}x-\frac{1}{2}\left(y'\right)^2, \tag{2.28}$$

donc

$$\begin{cases} a\left(y'\right)=\dfrac{y'+\left(y'\right)^3}{2} \\ \text{et} \\ b\left(y'\right)=-\frac{1}{2}\left(y'\right)^2 \end{cases}.$$

On pose $y'=p$, alors l'équation 2.28 se transforme à

$$y=\frac{p+\left(p\right)^3}{2}x-\frac{1}{2}\left(p\right)^2, \tag{2.29}$$

En dérivant cette dernière par rapport à x, on trouve

$$p-a\left(p\right)=p'\left(xa'\left(p\right)+b\left(p\right)\right).$$

$$\text{Si} \quad a(p) = p \Rightarrow \frac{p+p^3}{2} = p \Rightarrow p \in \{0, 1, -1\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0x - 0 = 0 \\ y_2 = \frac{1+1}{2}x - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \\ y_3 = \frac{-1-1}{2}x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si $a(p) \neq p$

$$\begin{cases} y = \dfrac{p+p^3}{2}x - \frac{1}{2}p^2 \\ dy = pdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = \frac{p\ +p^3}{2}dx + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}p^2\right)x - p\right]dp \\ dy = pdx \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{1+3p^2}{p-p^3}x - \dfrac{2p}{p-p^3}$ équation paramétrique très simple à résoudre.

Exemple 2.17. Soit l'équation de Lagrange

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

On pose $y' = p$, alors l'équation 2.28 se transforme à

$$y = p^2 x - (p)^2, \tag{2.30}$$

En dérivant cette dernière par rapport à x, on trouve

$$p - a(p) = p'(2xp + 2p),$$

donc

$$p - p^2 = p'(xa'(p) + b(p)),$$

$$\text{Si } a(p) = p \Rightarrow p^2 = p \Rightarrow p \in \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0x - 0 = 0 \\ y_2 = 1^2x - 1^2 = x - 1 \end{cases}$$

Si $a(p) \neq p$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2xp}{p-p^2}x - \frac{2p}{p-p^2} = 2\frac{x+1}{1-p};$$

alors

$$\frac{dx}{x+1} = 2\frac{dp}{1-p};$$

par suit :

$$\ln|x+1| = \ln\frac{1}{(1-p)^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

autrement dit :

$$x+1=\frac{K}{(1-p)^2},K\in\mathbb{R},$$

donc la solution générale de l'équation 2.30 est la solution de l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} y &= xa(p)+b(p)=(x+1)p^2 \\ x+1 &= \frac{K}{(1-p)^2}, \end{cases} \Rightarrow p^2=\frac{y}{x+1}$$

il vient

$$x+1=\frac{K}{\left(1-\sqrt{\frac{y}{x+1}}\right)^2};$$

ou bien

$$x+y-2\sqrt{2(x+1)}+1=K,K\in\mathbb{R}.$$

2.6.2 Equations de Clairaut

Définition 2.6. [01]

On appelle équation de **Clairaut** toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$y=xy'+f(y')$$

où f est une application continûment dérivable sur des intervalles à préciser.

Remarque 2.6. C'est un cas particulier des équations de Lagrange si en prend dans l'équation 2.26 $a(y')=y'$.

2.6.2.1 Méthode de résolution

On pose $y'=t$, alors l'équation devient

$$y=xt+f(t)$$

On la dérive par rapport à x, donc

$$y'=xt'+t+t'f'(t).$$

D'où

$$xt' + t'f'(t) = 0 = t'(x + f'(t))$$

1) Si $t' = 0$, alors $t = c \in \mathbb{R}$, d'où

$$y = cx + f(c).$$

2) Si $x + f'(t) = 0$, et si f' est inversible, alors

$$t = (f')^{-1}(-x).$$

Exemple 2.18. [01]
On cherche à résoudre $y = xy + \dfrac{y'}{y'+1}$, sur $]-\infty; 0[$

On pose $y' = t$, donc l'équation devient

$$y = xt + \frac{t}{t+1}.$$

D'où

$$y' = xt' + t + \frac{t'(t+1) - tt'}{(t+1)^2} = t \Rightarrow t'\left(x + \frac{1}{(t+1)^2}\right) = 0$$

1) Si $t' = 0$ alors $t = c \in \mathbb{R}$, d'où $y = cx + \dfrac{c}{c+1}$ est une solution générale.
2) Si $x + \dfrac{1}{(t+1)^2} = 0$, alors $t = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} - 1$
$\Rightarrow y = \int \left(\frac{1}{\sqrt{-x}} - 1\right) dx = -x - 2\sqrt{-x}$ est une solution singulière.

Exemple 2.19. Soit l'équation de **Cliraut** :

$$y = xy' - y'^3 \text{ et } (f(y') = -y'^3).$$

On pose $y' = t$, donc l'équation devient

$$y = xt - t^3.$$

D'où

$$y' = xt' + t - 3t't^2 = t \Rightarrow t'\left(x - 3t^2\right) = 0$$

Si $t' = 0$ alors $t = c \in \mathbb{R}$, d'où $y = cx - c^3$
Si $\left(x - 3t^2\right) = 0$, alors $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x}$
$\Rightarrow y = \int \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x}\right) dx = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}}$ est une soilution singulière de l'équation de Cliraut.

2.7 Résolution par les Series de Taylor et les transformées Laplace

Il faut noter que les series de taylor à n dimension d'un vecteur $Y(x)$ est le vecteur

$$\begin{pmatrix} y_1(a) + \frac{y_1(a)}{1!}(x-a) + \frac{y_1(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y_1(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ y_2(a) + \frac{y_2(a)}{1!}(x-a) + \frac{y_2(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y_2(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ \vdots \\ y_n(a) + \frac{y_n(a)}{1!}(x-a) + \frac{y_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y_n(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{pmatrix}$$

Définition 2.7. [03]

Soit U est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur U si pour

$$\forall a \in U,\ \exists (a_n) \in \mathbb{C},\ \exists r > 0,\ \forall z \in D(a,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

, c'est-à-dire pour tout dans le disque (ouvert) de centre et de rayon.

Théorème 2.3. *[04]*

Soit le systeme autonome à n dimensions des équations différentielles analytiques

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

et soit la suite recurrente des fonctions analytiques $g_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définies par

$$\begin{cases} g_1(y) = f(y) \\ g_k(y) = Dg^{(k-1)}(y)\, f(y)\,. \end{cases} \tag{2.31}$$

Alors la fonction définie par

$$y(x) = b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} g^k(b)(x-a)^k$$

est la solution unique de 2.31, et $\forall n \geq 1$, $y^{(n)} = g^{(n)}(y)$

Corollaire 2.1. *[04]*

Soit f une fonction analytique en (a,b), et soit

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

alors la seule solution de ce systeme est donnée par la fonction analytique

$$y(x) = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(a,b)(x-a)^n}{n!}$$

où g_n est définie par

$$\begin{cases} g' = f \\ g_{k+1} = \dfrac{\partial g^n}{\partial x} + \dfrac{\partial g^n}{\partial y} f \end{cases}$$

Exemple 2.20. [10]

Soit à resoudre l'EDO autonome non linéaire $y' = y^2$

$\Rightarrow y'(0) = (y(0))^2$ et $y'' = (y^2)' \, 2yy' = 2y^3 \Rightarrow y''(0) = 2(y(0))^3$

$y''' = (2y^3) = 6y^2y' = 6y^4 \Rightarrow y'''(0) = 6(y(0))^4$

$y^{(4)} = (6y^4)' = 24y^3y' = 24y^5 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 24(y(0))^5$

$\Rightarrow y^{(n)}(0) = n!\,(y(0))^{n+1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + (y(0))^2 x + \frac{2(y(0))^3}{2!}x^2 + \frac{6(y(0))^4}{3!}x^3 + \frac{24(y(0))^5}{4!}x^4 + \cdots \\ &= y(0)\left(1 + y(0)x + (y(0))^2x^2 + (y(0))^3x^3 + (y(0))^4x^4 + \cdots\right) = \frac{y(0)}{1 - y(0)x} \end{aligned}$$

Proposition 2.5. *[09]*

Soit l'EDO $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(x)$, alors la solution est $y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p))$, tel que

$$Y(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} U(p) - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{j} b_j u^{(i-1)}(0)\,p^{j-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j} a_j y^{(i-1)}(0)\,p^{j-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}$$

Preuve

Si les conditions initiales sont données par $y(0), \ldots, y^{n-1}(0)$ et en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l' equation differentielle, en utilisant les propriétés de linéarité, d'additivité et de dérivation, nous obtenons alors la formule suivante :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}\right](p) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right) Y_p - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_j y^{(i-1)}(0)\, p^{j-i} = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i p^i\right) U(p) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} b_j u^{(i-1)}$$

d'où la solution

Exemple 2.21. [09]

Soit l'EDO

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $\dot{y}(0) = 0$

$\Rightarrow p^2 Y(p) + 2pY(p) + Y(p) - py(0) - 2y(0) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p^2+2p+1)p^2} + \frac{p+2}{p^2+2p+1}$

On a : $\frac{1}{p^2+2p+1} = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$ et $\frac{p+2}{p^2+2p+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$

$\Rightarrow Y(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$

$\Rightarrow y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} - 2 + x + e^{-x} + xe^{-x} = x - 2 + 3e^{-x} + 2xe^{-x}$

2.8 Méthodes de résolution des EDO Linéaires du 2ème ordre

2.8.1 Généralités

Définition 2.8. [03]

Les équations du type

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x) \tag{2.32}$$

telles que a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sont appelées des équations différentielles d'ordre deux à coéfficients variables.

Si les fonctions a et b sont constantes l'équation 2.32 est à coefficients constants.

Si la fonctions $c = 0$ l'équation 2.32 est sans second membre ou homogène. Ainsi

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0. \tag{2.33}$$

Théorème 2.4. *[03]*

Si $a(x)$, $b(x)$ sont des fonctions continues, alors l'équation (2.32) a au moins une solution et pour tout

$x_0 \in I$, *l'équation* (2.32) *a une unique solution vérifiant :*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Définition 2.9. [03]

Soient y_1, y_2 deux solutions de (2.33), on dit que y_1, y_2 sont libres si et seulement si

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Définition 2.10. [03]

on dit que y_1, y_2 forment un système fondamental de (2.33) si toutes les solutions y de (2.33) sont une combinaison linéaire de y_1, y_2, c-à-d, si y est la solution de (2.33)

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

Proposition 2.6. *Si y_1 et y_2 sont solutions de 2.33, alors $y_1 + y_2$ et λy_1 avec λ scalaire sont aussi solutions.*

Définition 2.11. Soit l'équation homogène de type 2.33, et y_1, y_2 deux solutions de cette équation.

On appelle Wronskien de (y_1, y_2) la quantité $W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$.

Si $W_{y_1,y_2} \neq 0$, on dit que (y_1, y_2) est un système fondamentale de l'équation homogène de type 2.33.

Proposition 2.7. *Soit $x_0 \in I$. Si $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$, alors : $\forall x \in I : W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$.*

Corollaire 2.2. *Soient y_1 et y_2 sont solutions de 2.33, alors y_1 et y_2 sont linéairement indépandantes ssi $\forall x \in I : W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$.*

Théorème 2.5. *Si y_1 et y_2 sont solutions de 2.33, alors y_1 et y_2 sont linéairement indépandantes, alors la solution générale de cette équation est $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

2.8.1.1 EDO Linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Théorème 2.6. *[11]*

La solution générale maximale y de l'équation non homogène

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{2.34}$$

est la somme d'une solution maximale particulière y_p de (2.34) et de solution générale y_h de l'équation homogène associée :

$$y = y_p + y_h. \tag{2.35}$$

Théorème 2.7. *[03]*
Pour résoudre l'équation différentielle homogène à coefficients constants :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0,$$

les solutions sont sous la forme $y_h(x) = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique avec trios cas :

$$r^2 + ar + b = 0, \tag{2.36}$$

1. *L'équation (2.36) a 2 racines réelles $r_1$et r_2, et la solution s'écrit comme suit :*

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

2. *L'équation (2.36) a 1 racine double r, et la solution s'écrit comme suit :*

$$y_h(x) = e^{rx}(c_1 + c_2 x).$$

3. *L'équation (2.36) a 2 racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors :*

$$y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x).$$

Les constantes c_1 et c_2 dépendent du choix des conditions initiales.

Exemple 2.22. [03]
Soit l'équation suivante : $y'' + 2y' - 3y = 0$, alors l'équation caractéristique est donnée par :
$r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-3}{2}$ ou $r_2 = \frac{5}{2}$, donc $y_h = c_1 e^{\frac{5}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$.

Remarque 2.7.
Pour la recherche de la solution particulière de (2.34), voir le sous pargraphe (3.2.4.2.1).

2.8.2 Méthodes de résolution des EDO Linéaires du 2$^{\text{ème}}$ ordre avec second membre

2.8.2.1 Méthode de variation des canstantes

Soient y_1, y_2deux solutions de l'équation homogène 2.33, donc la solution de générale de cette équations est $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Le principe de cette méthode est de varier les constantes c_1 et c_2 en fonction de x. i.e.,

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2(x)\, .$$

En dérivant y, on trouve

$$y' = c_1'(x)\, y_1 + c_1(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2 + c_2(x)\, y_2'.$$

On contraint les fonctions $c_1(x)$ et $c_2(x)$ à vérifier que :

$$c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 = 0. \tag{2.37}$$

Donc y' à vérifier que

$$y' = c_1(x)\, y_1' + c_2(x)\, y_2'. \tag{2.38}$$

En dérivant 2.38, il nous donne

$$y'' = c_1(x)\, y_1'' + c_2(x)\, y_2'' + c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2'. \tag{2.39}$$

En remplaçant ces éxpréssions dan l'équation 2.34, on obtient

$$c_1(x)\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + c_2(x)\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) + c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' = f(x)\, . \tag{2.40}$$

On sait que $c_1(x)\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + c_2(x)\left(y_2'' + ay_2' + b_2y\right) = 0$, car y_1, y_2 sont des solutions de l'équation homogène 2.33. Alors il reste que

$$c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' = f(x)\, . \tag{2.41}$$

D'où les équations 2.37 et 2.41 nous donnent un système linéaire des inconnues $c_1'(x)\, , c_2'(x)$ comme suit :

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' = f(x)\,. \end{cases} \tag{2.42}$$

Ce système nous permet de trouver $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$. Par intégration, on obtient $c_1(x)$ et $c_2(x)$, puis en les remplaçant dans

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 \tag{2.43}$$

on trouve la solution générale.

Exemple 2.23. Soit à résoudre l'équation :

$$y'' + y' - 30y = x \tag{E}$$

1)On résout l'équation homogène

$$y'' + y' - 30y = 0 \tag{H}$$

son équation caractéristique est

$$r^2 + r - 1 = 0,$$

donc $r_1 = 5$ et $r_2 = -6$, alors la solution générale de l'équation homogène H est

$$y_h = c_1 \underbrace{e^{5x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-6x}}_{y_2}.$$

2) On cherche y_p : on utilise la méthode de variation des constante (MVC), par résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' = x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)\, e^{5x} + c_2'(x)\, e^{-6x} = 0 \ldots (1) \\ 5c_1'(x)\, e^{5x} - 6c_2'(x)\, e^{-6x} = x \ldots (2) \end{cases}$$

$-5c_1'(x)\, e^{5x} \times (1) + (2)$, on trouve

$$c_2'(x) = \frac{-1}{11} x e^{6x}.$$

En substituant dans (1), on obtient

$$c_1'(x) = \frac{1}{11} x e^{-5x}.$$

Une simple intégration nous donne

$$c_2(x) = \int \frac{-1}{11} x e^{6x} dx = -\frac{1}{396} e^{6x} (6x - 1),$$

et

$$c_1(x) = \int \frac{1}{11} x e^{-5x} dx = -\frac{1}{275} e^{-5x} (5x-1).$$

Donc $y_p = c_1(x) e^{5x} + c_2(x) e^{-6x} = -\frac{1}{275}(5x-1) - \frac{1}{396}(6x-1)$. Alors

$$y_g = y_h + y_p = -\frac{1}{275}(5x-1) - \frac{1}{396}(6x-1) + K_1 e^{5x} + K_2 e^{-6x}.$$

Remarque 2.8. Si $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$, alors on peut utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système 2.42 comme suit :

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W_{y_1,y_2}} = \frac{y_2 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)}$$

et

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W_{y_1,y_2}} = \frac{y_1 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)}.$$

Donc $c_1(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)} dx + K_1$ et $c_2(x) = \int \frac{y_2 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)} dx + K_2$, alors la solution générale de l'équation 2.34 est

$$y_g = \underbrace{K_1 y_1 + K_2 y_2}_{y_h} \underbrace{+ y_1 \int \frac{y_1 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)} dx + y_2 \int \frac{y_2 f(x)}{W_{y_1,y_2}(x)} dx}_{y_p}.$$

2.8.2.2 Cas particuliers pour trouver y_p

La solution particulière y_p de l'équation 2.34 peut être trouvée par la méthode des coefficients inditerminés dans les cas simples suivants :

1) Si $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, avec $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

1-i) Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique 2.36, on pose $y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$, avec $Q_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients inditerminés.

1-ii) Si α est une racine de l'équation caractéristique 2.36, on pose $y_p = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$, où k est l'ordre de la racine α ($k = 1$ ou $k = 2$).

2) Si $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, on distingue deux cas :

2-i) Si $\alpha \pm \beta i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique 2.36, on pose $y_p = e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x)$ avec $S_N(x)$ et $T_N(x)$ sont des polynômes de degré $N = \max(n, m)$.

2-ii) Si $\alpha \pm \beta i$ est racine de l'équation caractéristique 2.36, on pose $y_p = x^k e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x)$, où k est l'ordre de la racine $\alpha \pm \beta i$ ($k = 1$ pour les EDO du 2$^{\text{ème}}$ ordre).

Dans tous les cas précidents les pôlynômes peuvent etre déterminés par l'identification.

Exemple 2.24. Soit l'équation différentielle $y''+2y'+3y=3x^2+7x-2$, alors son équation caractéristique est $r^2+2r+3=0$, et $f(x)=e^0\left(3x^2+7x-2\right)$ et on $\alpha=0$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.

Donc : $y_p=e^{0.x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$, par identification on trouve : $A=1, B=1, C=-2$.

ii) Soit l'équation différentielle $y''-2y'+y=xe^x$, l'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$ elle a un racine double $r=1$. le second membre est $f(x)=xe^x$, ici $\alpha=1$ et $n=1$. Alors $y_p=x^2e^x(Ax+B)$. On trouve : $A=\frac{1}{6}, B=0$. Donc la solution générale de l'équation donnée est de la forme $y_g=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x$.

iii) Soit l'équation différentielle $y''-2y'+2y=[2\cos x+\sin x]e^x$

$1+i$ est une solution simple de l'équation caractéristique. Donc $y_p=x[A\cos x+B\sin x]e^x$. On trouve $A=-\dfrac{1}{2}, B=1$.

2.8.2.3 EDO Linéaires du 2ème ordre à coefficients variables

2.8.2.3.1 Recherche d'une solution particulière

1ère étape

Soient deux solutions y_1, y_2 de l'EDO homogène (2.33), alors on pose $y_2=zy_1$ ce qui implique

$$y_2'=y_1'z+\ y_1z' \Rightarrow y_2''=y_1''z+\ y_1z''+2y_1'z.$$

On remplace dans l'équation (2.33), on obtient

$$y_1z''+2y_1'z'+a\left(y_1'z+y_1z'\right)+by_1z=0,$$

donc

$$\left(y_1''+ay_1'+by_1\right)z+z''y_1+z'\left(2y_1+ay_1\right)=0.$$

Il résulte que

$$z''y_1+z'\left(2y_1+ay_1\right)=0. \tag{2.44}$$

Pour résoudre l'équation 2.44, il suffit de faire le changement de variable $z'=u$, alors

$$u'y_1+u\left(2y_1+ay_1\right)=0 \tag{2.45}$$

(2.45) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre (très simple).

2ème étape

Si (y_1, y_2) est une base de solutions de l'équation sans second membre, on cherche une solution y sous la forme :

$$\begin{cases} y(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x), \\ y'(x) = \lambda_1(x) y_1'(x) + \lambda_2(x) y_2'(x). \end{cases}$$

En particulier, l'expression de y' entraîne que : $y' = \lambda_1' y_1 + \lambda_1 y_1' + \lambda_2' y_2 + \lambda_2 y_2' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \Rightarrow$

$$\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0. \tag{2.46}$$

L'introduction des valeurs de y et y' dans l'équation différentielle 2.32 donne une deuxième équation en λ_1', λ_2', ce qui donne avec la précédente : $(\lambda_1 y_1)' = \lambda_1' y_1 + \lambda_1 y_1'$, donc

$$(\lambda_1 y_1)'' = (\lambda_1' y_1 + \lambda_1 y_1')' = \lambda_1'' y_1 + \lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_1' y_1' = \lambda_1'' y_1 + 2\lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1''$$

$$\Rightarrow$$

$$(\lambda_1'' y_1 + 2\lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1'') + (\lambda_2'' y_2 + 2\lambda_2' y_2' + \lambda_2 y_2'') + a(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2') + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = c$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda_1 (y_1'' + a y_1' + b y_1) + \lambda_2 (y_2'' + a y_2' + b y_2) + \lambda_1'' y_1 + 2\lambda_1' y_1' + \lambda_2'' y_2 + 2\lambda_2' y_2' = c$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda_1'' y_1 + 2\lambda_1' y_1' + \lambda_2'' y_2 + 2\lambda_2' y_2' = c$$

$$(2.46) \Rightarrow (\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2)' = \lambda_1'' y_1 + \lambda_1' y_1' + \lambda_2'' y_2 + \lambda_2' y_2' = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda_1'' y_1 + 2\lambda_1' y_1' + \lambda_2'' y_2 + 2\lambda_2' y_2' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c, \tag{2.47}$$

(2.46), (2.47), est un système différentiel linéaire d'ordre 2 en λ_1', λ_2', que l'on résout.

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.25. [03]

Soit l'EDO inhomogène

$$x^2y'' + xy' - y = 2x,$$

associée à l'EDO homogène

$$x^2y'' + xy' - y = 0. \tag{2.48}$$

On remarque que $y_1 = x$ est une solution de l'équation homogène 2.48, alors on pose $y_2 = zy_1 = xz$ ce qui implique

$$\begin{cases} y_2' = z'y_1 + zy_1' \\ y_2'' = 2z' + xz''. \end{cases}$$

Donc

$$x^2(2z' + xz'') + x(z'y_1 + zy_1') - xz = 0$$

$\Rightarrow$

$$x^3z'' + 3x^2z' = 0.$$

Pour résoudre cette dernière équation, on pose $z' = u \Rightarrow x^3u' + 3x^2u = 0 \Rightarrow \dfrac{u'}{u} = -\dfrac{3}{x} \Rightarrow \ln(u) = -3\ln(x) \Rightarrow u = \dfrac{1}{x^3} = z'$

$\Rightarrow z = \dfrac{-1}{2x^2} \Rightarrow y_2 = x\dfrac{-1}{2x^2} = \dfrac{-1}{2x}, \Rightarrow y(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda(x)y_2(x) = \lambda_1(x)x + \lambda(x)\dfrac{-1}{2x},$

on pose $\lambda_2(x) = -\dfrac{\lambda(x)}{2}$, donc $y(x) = \lambda_1(x)x + \lambda_2(x)\dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)x + \lambda_2'(x)\frac{1}{x} = 0 \\ \lambda_1'(x) - \lambda_2'(x)\frac{1}{x^2} = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1'(x) = x \\ \lambda_2'(x) = -x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \\ \lambda_2(x) = -\frac{1}{4}x^4 + c_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right)x + \left(-\frac{1}{4}x^4 + c_2\right)\dfrac{1}{x}.$

2.8.2.4 Résolution sous la forme de séries entières (Méthode de Frobenius)

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, alors f est développable en série entière au voisinage de $x_0 \in I$ si

$$\exists r > 0, a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\text{une suite telle que; } \forall |x - x_0| < r \Rightarrow f(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n (x - x_0)^n .$$

Soit l'EDO homogène

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0. \tag{2.49}$$

Le but est de chercher les solutions de (2.49) sous la forme d'une série entière.

On suppose que a, b, c sont développables en séries entières au voisinage de 0.

Exemple 2.26. [03]

Soit l'EDO :

$$y'' + xy' + y = 0, \tag{2.50}$$

alors on pose $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donc

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On remplaçant dans 2.50, on obtient

$$\begin{aligned} y'' + xy' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n. + a_0 + a_1 \\ & a_0 + 2a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ = 0 \\ & 2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} + k a_k + a_k \right] x^k + a_0 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k (k+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \\ a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}_3 = -\frac{a_1}{3} = \frac{(-1)^2 a_0}{4*2} \\ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{(-1)^3 a_1}{5*3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 2} \text{ et } a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) \ \text{ et } y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}.$$

2.8.2.5 Equation d'Euler

Définition 2.12. :

Une équation différentielle du seconde ordre d'Euler est une équation de la forme :

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + A_2 (ax+b)^{n-2} y^{(n-2)} + ... + A_{n-1} (ax+b) y' + A_n y = f(x)$$

où $a, b, A_1, ..., A_n$ sont des scalaires réels ($a \neq 0$), et g est une fonction sur un intervalle I.

Méthode de résolution :

On pose

$$ax + b = e^t,$$

autrement dit :,

$$t = \ln(ax+b).$$

Après les calculs, on a :

$$\begin{aligned} y' &= ae^{-t}\frac{dy}{dt}, y'' = a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \\ y''' &= a^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \text{ etc.,} \end{aligned}$$

Aprés ses changement l'équation d'Euler se transforme en une équation linéaire à coefficients constants.

Exemple 2.27. :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y" - xy' + y = 1.$$

On fait le changement $x = e^t$, on trouve

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Par conséquent, l'équation donnée prend la forme

$$y'' + y = 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \\ &= c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + 1. \end{aligned}$$

Remarque 2.9. Pour l'équation homogène d'Euler

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + A_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + ... + A_{n-1} x y' + A_n y = 0. \tag{2.51}$$

Lasolution peut être cherchée sous la forme

$$y = x^k. \tag{2.52}$$

En sustituant dans 2.51 $y, y', ..., y^{(n)}$ données par 2.52, on aboutit à une équation caractéristique d'où on peut déterminer l'éxposant k.

Si k est une racine réelle de l'équation caractéristique d'ordre m, il lui correspond m solutions linéairement indépendantes

$$y_1 = x^k, y_2 = x^k \ln x, y_3 = x^k \ln^2 x, ..., y_m = x^k (\ln x) m - 1.$$

Si $\alpha \pm \beta$ est une couple de racine complexe d'ordre m, il lui correspond $2m$ solutions linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\alpha \cos(\beta \ln x), y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x), \\ y_3 &= x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), y_3 = x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \\ &\ldots \\ y_{2m-1} &= x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x), y_{2m} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x) \end{aligned}$$

Exemple 2.28. Intégrer l'équation

$$x^2 y" - 3xy' + 4y = 0.$$

Posons

$$y = x^k, y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1) x^{k-2}. \tag{2.53}$$

En remplaçant dans l'équation donnée et après simplification par x^k, on trouve l'équation caractéristique

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

donc

$$k_1 = k_2 = 2, \text{ racine double (d'ordre } m = 2),$$

il résulte que la solution générale est

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x.$$

2.8.3 Cas où on peut abaisser l'ordre

1) Si une EDO ne contient pas y explicitement, par exemple

$$F(x, y', y'') = 0,$$

en posant $y' = p$, on a une équation dont l'ordre est d'une unité inferieure

$$F(x, p, p') = 0.$$

Exemple 2.29. Trouver une solution particulière de l'équation

$$\begin{cases} xy'' + y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $y' = p$, on a $y'' = p'$, alors

$$xp' + yp + x = 0.$$

En intégrant cette équation comme une équation linéaire par rapporat à p, on trouve

$$px = c_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Et on a $y' = p = 0$ pour $x = 0$, donc $c_1 = 0$, alors

$$p = -\frac{x}{2},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

en intégrant encore une fois,

$$y = -\frac{x^2}{4} + c_2.$$

Et on a $y(0) = 0$, on trouve $c_2 = 0$. Par conséquent,

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

2) Si une EDO ne contient pas x explicitement, par exemple

$$F(y, y', y'') = 0,$$

en posant $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$, on a une équation dont l'ordre est d'une unité inferieure

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Exemple 2.30. Trouver une solution particulière de l'équation

$$\begin{cases} yy'' + y'^2 = y^4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $y' = p$, on a $y'' = p\frac{dp}{dy}$, alors

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

En intégrant cette équation comme une équation de type de Bernoulli par rapport à $p(y)$, on trouve

$$p = \pm y\sqrt{c_1 + y^2}.$$

Et on a $y' = p = 0$ pour $y = 1$, donc $c_1 = -1$, alors

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1},$$

en intégrant on a,

$$\arccos \frac{1}{y} \pm x = c_2.$$

Et on a $y(0) = 1$, on trouve $c_2 = 0$. Par conséquent,

$$\frac{1}{y} = \cos x \Rightarrow x = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

CHAPITRE 3

EDO Linéaires véctorielles (Systèmes Linéaires)

3.1 Préliminaires

Définition 3.1. Un système d'équations différentielles (ou système différentielle) est un systèème de la forme :

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, y_2 + ... + y_n\right) \\ y_2' = f_2\left(x, y_1, y_2 + ... + y_n\right) \\ \vdots \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, y_2 + ... + y_n\right). \end{cases}$$

On appelle solution de ce système une suite $(y_1, ..., y_n)$ des fonctions définies et dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que

$$y_i' = f_i\left(x, y_1, y_2 + ... + y_n\right), 1 \leq i \leq n.$$

Définition 3.2. Un système différentiel linéaire du premier ordere dans $\mathbb{K}^n$ est une équation de la forme,

$$Y'(x) = \frac{dY}{dx} = A(x)\, Y(x) + B(x)\,, \tag{3.1}$$

avec $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \in M_n\left(\mathbb{K}^n\right),\ Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{K}^n$ sont des fonctions continues données. $A : I \to M_n(\mathbb{K}^n), B : I \to \mathbb{K}^n$ avec $I \subset \mathbb{R}$. On dit que le système 3.1 est homogène, si $B(x) = 0$ et e système homogène associe est

$$Y'(x) = \frac{dY}{dx} = A(x)Y(x). \tag{3.2}$$

3.2 Système différentiel linéaire du premier ordere à coefficients constants

Définition 3.3. On appelle système différentiel linéaire du premier ordere à coefficients constants est un systèème de la forme :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + ... + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n + b_n(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

On appelle solution de ce système une suite $(y_1, ..., y_n)$ des fonctions définies et dérivables dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2 + ... + y_n), 1 \leq i \leq n.$$

Le système 3.3 s'écrit sous forme matricielle,

$$Y' = AY + B(x), \tag{3.4}$$

avec $A(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$. Le système homogène associe est,

$$Y' = AY. \tag{3.5}$$

3.2.1 Solutions exponentielles elementaires de $Y' = AY$

On cherche une solution de la forme $Y(x) = e^{\lambda x}U$, où $\lambda \in \mathbb{K}, U \in \mathbb{K}^n$, tel que $\mathbb{K} =\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} =\mathbb{C}$, du système linéaire

$$Y' = AY. \tag{3.6}$$

Théorème 3.1. *[03]*

Si la matrice A du système (3.6) est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors la solution générale de ce système est donnée par :

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x} u_i,$$

où $c_i \in \mathbb{K}$, $(1 \leq i \leq n)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ étant une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Proposition 3.1. *[03]*

Si la matrice A est trigonalisable (A n'est pas diagonalisable) dans $\mathbb{R}$ et P la matrice de passage telle que $T = P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure alors $Y = PX$ est la solution du système (3.6), et X étant la solution du système triangulaire $X' = TX$.

Définition 3.4. [03]

La matrice de type (n, n) de la serie

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = I_n + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + ...,$$

se note $\exp(M)$ (exponentielle de matrice carré M) ou e^M.

Proposition 3.2. *Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ co„utent $(AB = BA)$,alors*

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

Théorème 3.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$,alors*

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA).$$

Théorème 3.3 (Calcul pratique de $\exp(A)$)**.** *Si $A, M \in M_n(\mathbb{K})$, B est une matrice complexe inversible de type $(n \times n)$ et $A = BMB^{-1}$, alors*

$$e^A = Be^M B^{-1}.$$

3.2.2 Solution générale du système $Y' = AY$

L'une des propriétés fondamentales de l'exponentiation des matrices réside dans le fait qu'elle est infiniment liée à la résolution des EDO linéaires à coefficients constants, et la solution Y telle que

$Y(x_0) = Y_0$, est donnée par :

$$Y(x) = e^{(x-x_0)A} Y_0, \forall x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{xA}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xA)^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(xA)^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nA \frac{(Ax)^{n-1}}{n!} \\
&= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xA)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xA)^m}{m!} \\
&= Ae^{xA}.
\end{aligned}$$

D'où, si

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)} Y_0,$$

alors

$$\frac{dY}{dx} = Ae^{A(x-x_0)} Y_0 = AY(x).$$

En prenant $x_0 = 0$, alors la solution générale est donnée par

$$Y(x) = e^{xA} V, V \in \mathbb{K}^n$$

3.2.3 Solution générale du système $Y' = AY + B$

$1^{ière}$ méthode :

On peut utiliser la méthode de de variation des constantes, c'est à dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme $Y(x) = e^{Ax} V(x)$, où V est supposé différentiable, alors

$$Y'(x) = Ae^{xA} V(x) + e^{xA} V'(x) = AY(x) + e^{xA} V'(x).$$

Il suffit donc de choisir V, telle que $e^{xA} V'(x) = B(x)$, soit par exemple

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-xA} B(x)\, dx, x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Pour $Y(x_0) = 0$, on obtient la solution particulière :

$$Y_p = e^{xA} \int_{x_0}^{x} e^{-tA} B(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} B(t)\, dt,$$

d'où la solution générale est :

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)}Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}B(t)\,dt. \tag{3.7}$$

2^{ième} méthode : On a ici

$$Y' = AY(x) + B(x) \tag{3.8}$$

avec $B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ des fonctions continues sur un intervalle I et A à coefficients constants (diagonalisable ou traigonalisable).

Soient P la matrice de passage (ou de changement de base) et D la matrice diagonale (T la matrice tiangulaire superieur). On pose $Y = PU$ ce qui donne

$$\begin{aligned} Y' = AY(x) + B(x) &\Leftrightarrow PU' = APU + B(x) \\ &\Leftrightarrow U' = \underbrace{P^{-1}AP}_{D}U + P^{-1}B(x) \\ &\Leftrightarrow U' = DU + P^{-1}B(x). \end{aligned}$$

On note $P^{-1}B(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$. Donc le système 3.8 devient :

$$\begin{cases} u_1' = \lambda_1 y_1 + c_1(x) \\ u_2' = \lambda_2 y_2 + c_2(x) \\ \vdots \\ u_n' = \lambda_n y_n + c_n(x). \end{cases} \tag{3.9}$$

Qvec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A. On cherche une solution particulière de chaque équation de ce dernier système et $Y = PU$ permet de conclure.

Exemple 3.1. Soit le système différentielle

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 3y_2 + 4e^{3x} \\ y_2' = -4y_1 - y_2 + 4x - 4e^{3x} \end{cases} \tag{3.10}$$

Alors $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Les vecteures propres sont $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $Y = PU$, le système 3.10 réecrit alors

$$\begin{aligned} PU(x) &= APU(x) + B(x) \\ &\Leftrightarrow \\ U(x) &= \underbrace{P^{-1}AP}_{D}U + P^{-1}B(x); \end{aligned}$$

où $B(x) = \begin{pmatrix} 4e^{3x} \\ 4x - 4e^{3x} \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\begin{cases} u_1' = 2u_1 + x \\ u_2' = -4u_1ue^{3x} \end{cases} \tag{3.11}$$

Chaque équation de ce système est linéaire d'ordre 1 non homogène, donc

$$\begin{cases} u_1 = K_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ u_2 = K_2e^{3x} + xe^{3x}, \end{cases}$$

revenant à $Y = PU$, alors

$$\begin{cases} y_1 = -3K_1e^{2x} + 4K_2e^{3x} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} + 4xe^{3x} \\ u_2 = 4K_1e^{2x} - 4K_2e^{3x} - 2x - 4xe^{3x}. \end{cases}$$

3.2.4 EDO linéaires d'ordre supérieur

Définition 3.5. [05]

EDO linéaire d'ordre n, $(n \in \mathbb{N})$:

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)\, y = b(x), \tag{3.12}$$

où $a_i(x), (i = 1 \ldots n)$ sont des fonctions continues.

3.2.4.1 Principe de superposition

Proposition 3.3. *[05]*

Si $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ sont des solutions de 3.12, Alors toute combinaison linéaire

$$z = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_k y_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(x)$$

est également solution, où $y_1, .., y_n$ sont linéairement indépendantes ssi le Wronskien est non nul

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_k^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Théorème 3.4. *[05]*

La solution générale de l'EDO linéaire inhomogène 3.12 s'obtient en superposant la solution générale de l'équation homogène correspondante

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0,$$

et une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation inhomogène :

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_1 y_n(t) + y_p(t).$$

3.2.4.2 EDO linéaires à coefficients constants

Théorème 3.5. *[05]*

$y = e^{\lambda_0 x}$ est une solution de l'EDO linéaire homogène à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{3.13}$$

si et seulement si λ_0 est un zéro du polynôme caractéristique, $p(\lambda_0) = 0$, où

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Exemple 3.2. [05] Déterminer la solution générale de $y''' - 7y' + 6y = 0$

on a : $P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda - 6\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$

La solution générale est donc $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$

3.2.4.2.1 Recherche d'une solution particulière

Soit l'EDO linéaire non homogène d'ordre n à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x) \tag{3.14}$$

- Pour $b(x)$ un polynôme de degré k :
  - Si $P(0) \neq 0$, alors $y_p(x) = r_p(x) = \sum_{j=0}^{j=k} \rho_j x^j$, un polynôme de degré k.
  - Si $P(0) = 0$, alors $y_p(x) = x^m r_p(x) = x^m \sum_{j=0}^{j=k} \rho_j x^j$, où m est la multiplicité de 0 et on détermine les coefficients $\rho_k, \ldots, \rho_0$.
- Pour $b(x) = Ae^{\alpha x}$
  - Si $P(\alpha) \neq 0$, alors $y_p(x) = Ce^{\alpha x}$
  - Si $P(\alpha) = 0$, alors $y_p(x) = Cx^m e^{\alpha x}$, où m est la multiplicité de $\lambda = \alpha$ et on détermine C (qui vaut $\frac{1}{P(\alpha)}$, resp $\frac{1}{P^{(m)}(\alpha)}$).
- Pour $b(x) = Ae^{\alpha x} p_k(x)$, où p_k est un polynôme de degré k
  - Si $P(\alpha) \neq 0$, alors $y_p(x) = e^{\alpha x} r_k(x) = e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{j=k} \rho_j x^j$
  - Si $P(\alpha) = 0$, alors $y_p(x) = x^m e^{\alpha x} r_k(x) = x^m e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{j=k} \rho_j x^j$, où m est la multiplicité de $\lambda = \alpha$, et on détermine C et les coefficients $\rho_k \ldots \rho_0$
- Pour $b(x) = A \sin \beta x$ ou $b(x) = B \cos \beta x$ ou $b(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$
  - Si $P(i\beta) \neq 0$, alors $y_p(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x$
  - Si $P(i\beta) = 0$, alors $y_p(x) = x^m (C \sin \beta x + D \cos \beta x)$, où m est la multiplicité du zéro $\lambda = i\beta$, et on détermine les coefficients C et D.
- Pour $b(x) = Ae^{\alpha x} \sin \beta x$ ou $b(x) = Be^{\alpha x} \cos \beta x$ ou $b(x) = Ae^{\alpha x} \sin \beta x + Be^{\alpha x} \cos \beta x$
  - Si $P(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, alors $y_p(x) = Ce^{\alpha x} \sin \beta x + De^{\alpha x} \cos \beta x$
  - Si $P(\alpha \pm i\beta) = 0$, alors $y_p(x) = x^m (Ce^{\alpha x} \sin \beta x + De^{\alpha x} \cos \beta x)$, où m est la multiplicité du zéro $\lambda = i\beta$, et on détermine les coefficients C et D.

3.2.5 Equivalence avec un système différentiel linéaire d'ordre 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $I =]\alpha, \beta[$.

soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$, $(n+1)$ applications de classe $C^0(I \to \mathbb{R})$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)\, y^{(0)} + b(x),$$

cette équation différentielle linéaire résolue d'ordre n est équivalente à l'équation différentielle linéaire résolue d'ordre 1 :

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}, \text{ telle que } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Exemple 3.3. [07]

Soit l'EDO du troisième ordre à conditions initiales

$$\begin{cases} 24y' - 10y'' + y''' + 4e^{4x} = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4 \end{cases} \tag{3.15}$$

Posons $\begin{cases} y' = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 \\ y_1' = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ y = y_2, \\ y_1(0) = 0,\ y_3(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y \\ y' = y_1 + 5y - y_3 \\ y_3' = -y_1 + y + 5y_3 + e^{4x} \end{cases}$

D'où le systeme différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 5y_3 + e^{4x} \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} y_1(0) = 0; \\ y_2(0) = 0; \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}'}_{Y'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}}_{Y(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{4x} \end{pmatrix}}_{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}}_{Y(0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y_0} \end{cases}$$

Le polynome caractéréstique de A est après calculs :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 4)^2 (\lambda - 6) .$$

On a $\quad (A - 6I_3).Y = 0 \Rightarrow v_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow E_1 = Ker(A - 6Id)$

$(A - 4I_3).Y = 0 \Rightarrow \exists! v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \Rightarrow E_2 = Ker(A - 4Id)^2$

$v_4 = (A - 4I_3).w_4 \Rightarrow w_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} v_6 & v_4 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$\exp(\Delta) = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} et N^2 = 0_3 \Rightarrow \exp(N) = I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}.e^{A}.P = e^{\triangle}.e^{N} = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A} = P.\begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}.P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(e^6+e^4\right) & 2e^6 & e^4-e^6 \\ 0 & 4e^4 & 0 \\ 4\left(e^4-e^6\right) & 4\left(2e^4-e^6\right) & 2\left(e^6+e^4\right) \end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P.\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].P$$

$$\Rightarrow Ax = P.\left[\begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].P^{-1}$$

$$e^{Ax} = P.\left[\exp\begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 4x \end{pmatrix}.\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].P^{-1}$$

$$= P.\begin{pmatrix} e^{6x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4x} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} e^{6x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4x} & xe^{4x} \\ 0 & 0 & e^{4x} \end{pmatrix}.P^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{Ax}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{6x}+(1-2x)\,e^{4x} & e^{6x}-(1-2x)\,e^{4x} & -e^{6x}+(1+2x)\,e^{4x} \\ e^{6x}-e^{4x} & e^{6x}+e^{4x} & e^{4x}-e^{6x} \\ -xe^{4x} & xe^{4x} & (1+x)\,e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Y(x)=e^{A(x-x_0)}.Y_0+\int_{x_0}^{x}e^{A(x-s)}.B(s)\,ds=e^{A(x)}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\int_0^x e^{A(x-s)}.\begin{pmatrix}0\\0\\e^{4s}\end{pmatrix}ds$$

$$= \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{6x}+(1+2x)\,e^{4x} \\ e^{4x}-e^{6x} \\ (1+x)\,e^{4x} \end{pmatrix}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t \begin{pmatrix} -e^{6(x-s)}+(1+2\,(x-s))\,e^{4(x-s)} \\ e^{4(x-s)}-e^{6(x-s)} \\ (1+x-s)\,e^{4(x-s)} \end{pmatrix}e^{4s}ds}_{V(x)}$$

$$V(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{6x}\left[\frac{e^{-2s}}{2}\right]_0^x+(1+2x)\,e^{4x}\,[s]_0^x-e^{4x}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x \\ e^{4x}\,[s]_0^x+e^{6x}\left[\frac{e^{-2s}}{2}\right]_0^x \\ (1+x)\,e^{4x}\,[s]_0^x-e^{4x}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Y(x)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{6x}+\frac{e^{4x}}{2}\left(2x^2+6x+3\right) \\ -\frac{3}{2}e^{6x}+\frac{e^{4x}}{2}\left(2x+3\right) \\ \frac{e^{4x}}{2}\left(x^2+4x+2\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x)=-e^{6x}+\frac{e^{4x}}{2}\left(2x^2+6x+3\right) \\ y_2(x)=-\frac{3}{2}e^{6x}+\frac{e^{4x}}{2}\left(2x+3\right) \\ y_3(x)=\frac{e^{4x}}{2}\left(x^2+4x+2\right) \end{cases}$$

d'où la solution explicite exacte de (3.15)

$$y(x)=y_2(x)=-\frac{3}{2}e^{6x}+\frac{e^{4x}}{2}\left(2x+3\right).$$

3.3 Séries d'exercices

Université de M'sila

Faculté des mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

$3^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 01(Equations differentielles)

N.B : Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercise 1. Dire si les fonctions données ci-dessous sont solutions des équations différentielles suivantes :

$1)^{(*)}$ $xy' = 2y$ et $y = 5x^2$ $\quad$ 2) $y'' = x^2 + y^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$

$3)^{(*)}$ $(x+y)\,dx + xdy = 0$ avec $y = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$

$4)^{(*)} y'' + y = 0$ et $y = 3\sin x - 4\cos x$ $\quad$ $5)^{(*)} y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)\,y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$ et $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x}$.

Exercise 2. Intégrer les équations différentielles, puis déterminer les solutions particulières si la condition initiale est donnée :

$1)^{(*)}$ $(x-1)\,dy + (y-2)\,dx = 0$

$2)^{(*)} 2x\,(1+y^2)\,dx - y\,(1+2x^2)\,dy = 0$

$3) y' - 2y = y^2$ avec $y = 3$ pour $x = 0$

$4)^{(*)}$ $(1+e^x)\,yy' = e^x$ avec $y\,(0) = 1$

$5)^{(*)}$ $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$ avec $y\,(0) = 1$

$6) yy' + x = 0$ $\quad$ $7) y' = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$

$8) y' = \dfrac{x^2}{y\,(1+y)}$ $\quad$ 9) $(1+x^2)\,y' = \sqrt{1+y^2}$

10) $(x^2 - yx^2)\,y' + y^2 + xy^2 = 0$ $\quad$ $11) y'\sin y.\cos y + xe^{x^2} = 0$

$12) xyy' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Exercise 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad$ $2)^{(*)} y' = \dfrac{2xy + y^2}{2x^2}$ $\quad$ $3)^{(*)} y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

4) $(x-y)\,ydx - x^2dy = 0$ $\quad$ $5) y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

6) $(x+y-3)\,dx - (x-y-1)\,dy = 0$

$7) y' = \sqrt{4x+3y+2}$ $\quad$ $8)^{(*)} y' = \dfrac{2x+y-3}{x+y-2}$

$9)^{(*)} y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$ $\quad$ $10)^{(*)}$ $(2x+2y-10)\,dx - (x+y+1)\,dy = 0$.

Exercise 4. Donner le type des équations différentielles suivantes, puis les intégrer :

1) $y' - \dfrac{y}{x} = x$ 2)$^{(*)}\dfrac{dy}{dx} = x^3 - \dfrac{y}{x}$ 3)$y' - \dfrac{1+3x^2}{x\left(1+x^2\right)}y = \dfrac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^2}$

4)$y' + \dfrac{y}{x} = ay^2 \log x$ 5)$y'.\left(x^2y^3 + xy\right) = 1$

6)$^{(*)}\left(2x\ sh\dfrac{y}{x} + 3y\ ch\dfrac{y}{x}\right)dx - 3x\ ch\dfrac{y}{x}dy + \dfrac{3\left(xdy - ydx\right)}{x^2} = 0.$

Exercise 5. 1) Montrer que l'équation diférentielle suivante a une solution particulière $y_1 = \cos x$, puis trouver sa solution générale :

$$y'\left(1 - \sin x \cos x\right) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0.$$

2) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$y' - \dfrac{1}{x}y = 2y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$ 2)$^{(*)}y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{x}y^2 + 1$ 3)$x^2y' + xy = -x^2y^2 + 1.$

Exercise 6. 1) Montrer que les équations suivantes sont des équations aux différentelles totales, puis trouver ses solutions générales :

1) $\cos y dx + \left(2y - x \sin y\right) dy = 0$

2)$\left(e^{y^2}dx + 2xye^{y^2}dy\right) + \left(ye^x dx + e^x dy\right) = 0$

3)$^{(*)} \log\left(y^2+1\right) dx + \dfrac{2y\left(x-1\right)}{y^2+1}dy = 0.$

2) Résoudre les équations différentielles suivantes admettant un facteur intégrant :

1) $\left(x + y^2\right) dx - 2xydy = 0$ 2)$^{(*)}y\left(1 + xy\right) dx - xdy = 0$

3)$\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln x\right) dy = 0$

4) $\left(x \cos y - y \sin y\right) dy + \left(x \sin y + y \cos y\right) dx = 0$

5)$^{(*)}xdy - ydx + \left(x^2 + y^2\right) tgydy = 0.$

Université de M'sila

Faculté des mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

$3^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 02(Equations différentielles)

N.B : Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercise 7. $a)^{(*)}$ Vérifier que les fonctions suivantes satisfont la condition de Lipschitz sur l'intervalle indiqué et donner la constant de Lipschitz :

1) $f(x,y) = 2yx^{-4}$ pour $x \in [1,\infty[$, 2) $f(x,y) = e^{-x^2}\arctan(y)$ pour $x \in [1,\infty[$,

3) $f(x,y) = 2y\left(1+e^{-|x|}\right)(1+y^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$b)$ Vérifier que les problèmes de Cauchy suivants satisfont du théorème de Cauchy-Lipschitz, puis trouver ses solutions :

1) $\begin{cases} y' = \frac{\cos x}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$, 2)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ 3)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \exp(\cos x^2 y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

$c)$ Donner les trois premières approximations successives des problemes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} y' = x + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, 2)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = 2y - 2x^2 - 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 3)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Exercise 8. $^{(*)}$ On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{PC}$$

1) Vérifier que $y = 0$ est solution de **??**.

2) Trouver une solution non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ de ce problème.

3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Exercise 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$^{(*)}$ $y = xy' - (y')^2$ 2) $y = x(1+y') + (y')^2$ 3)$^{(*)}$ $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$, 4)$^{(*)}$ $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$, 5) $y = 2xy' + (y')^2$, 6)$^{(*)}$ $y = 2x\dfrac{1}{(y')^2} + y'$, 7)$^{(*)}$ $y = x\sqrt{y'} - \dfrac{2}{(y')^2}$, 8)$^{(*)}$ $y = \dfrac{x}{2y'-2} - (y')^2$.

Université de M'sila

Faculté des mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

$3^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 03(Equations différentielles)

N.B : Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercise 10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis trouver les valeurs et les vecteurs propres de A.

2) En déduire la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

avec condition initiale $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

Exercise 11. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercise 12. On définit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A n'est pas diagonalisable.

Bibliographie

[01] Acary.V, Modèles Mathématiques pour la physique, chapitre 2, l'université Joseph Fourier de Grenoble, 17/10/2005.

[02] Benzoni.S, équations différentielles ordinaires,11 mai 2007.

[03] Cours License Mathématiques S2 S4 S5. Université de M'sila. 2009-2012.

[04] Cody A. Alsaker. Solving Systems of Differential Equations Using the Taylor Series. South Dakota School of Mines and Technology. 15 May 2009

[05] Daniel.V, équations différentielles, 25 novembre 2003.

[06] Florent.P, G. Lauton, M.Lauton, Outils et équations et modèles mathématiques tome5, Systèmes différentielles, les presses de l'université du québec, 1978.

[07] Fontchastagner.J. Introduction aux équations Différentielles. Université de Nancy. 2010-2011.

[08] Giroux.A, équations différentielles. Notes de cours pour MAT 2115, Département de Mathématiques et Statistique Université de Montréal, 2009.

[09] Gouaisbaut.F, Résolution des Equations Différentielles Ordinaires. LAAS-CNRS, Universit e de Toulouse, UPS. 4 septembre 2009

[10] Poitier.A, Olivier Wintenberger, équations différentielles, école Polytechnique, 2005-2006.

[11] Raimbault.J-L, équations Différentielles. Cours et Exercices, IFIPS S4, Université Paris XI, 2007.

[12] Vekemans. Le problème de Cauchy. D.Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville